

LA COMBINATOIRE CLASSIQUE (*)

PAR

DOMINIQUE FOATA

RÉSUMÉ. — On présente ici certains aspects de la recherche en combinatoire et on indique comment cette discipline s'insère entre les domaines d'application (statistique, informatique) et le courant principal de la mathématique.

1. Introduction

Il incombe à tout scientifique engagé dans les travaux de recherche de devoir faire des rapports à des non-spécialistes (ne serait-ce que pour solliciter des fonds de recherche!), de placer son sujet, de dire quels sont ses motivations et ses espoirs. Le but du présent article est de discuter de certains aspects de la recherche en combinatoire, de voir comment cette discipline trouve une place originale entre la statistique, l'informatique et le courant principal de la mathématique.

Dans un premier paragraphe, on rappellera la classification donnée par *Mathematical Reviews* pour ventiler les articles de combinatoire. On s'interrogera ensuite sur les effets du renouveau du calcul en mathématique, sur les motivations de certaines sciences appliquées qui ont contribué à cette renaissance. Enfin, on donnera une vue d'ensemble des problèmes combinatoires classiques d'aujourd'hui.

(*) Cette communication est une refonte de l'article "La mathématique combinatoire" paru dans la *Gazette des Sciences Mathématiques du Québec* (t. 6, no. 8, mars 1982, p. 8–16).

D. FOATA, Département de Mathématique, Université de Strasbourg, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

Cet article a été composé au moyen du logiciel T_EX par le laboratoire de traitement de textes et typographie informatique de l'Université de Strasbourg.

La présente reproduction a été recomposée en 2021 et bénéficie d'une sortie graphique de haute résolution, palliant ainsi la pauvreté de l'impression de 1984, à 180 points par pouce, à une époque où les photo-composeuses n'étaient pas encore correctement connectées à des fichiers T_EX.

2. La classification de Mathematical Reviews

Si l'on consulte la classification de *Mathematical Reviews*, à la section 05 ("Combinatorics, Graph Theory"), on constate que cette section est elle-même divisée en trois sous-sections :

05 A "Classical combinatorial problems"

05 B "Designs and configurations"

05 C "Graph Theory".

De quels problèmes combinatoires classiques s'agit-il ? On verra dans un instant ce qu'il faut entendre par là aujourd'hui. La rubrique 05 B porte un titre explicite. Les "designs" sont les modèles tirés des géométries finies : plans projectifs finis, carrés latins, blocs incomplets équilibrés, systèmes de Steiner, ... On les a beaucoup étudiés. Certains résultats ont défrayé la chronique, comme la fausseté de la vieille conjecture d'Euler sur les carrés latins orthogonaux démontrée par BOSE et son école ou la non-existence de certaines familles de plans projectifs établie par BRUCK et RYSER, ou encore l'étude asymptotique des blocs incomplets équilibrés par WILSON.

Le livre de HALL [1], pourtant déjà ancien, donne une excellente idée de la problématique sous-jacente. Certains modèles ont trouvé un champ d'application direct, par exemple dans la construction des codes correcteurs d'erreur (*cf.* VAN LINT [2]). D'autres, comme les systèmes de Steiner, ont été les ingrédients fondamentaux pour décrire le réseau de Leech [3], à la base de la construction des groupes simples sporadiques (*cf.* [4]).

Quant à la théorie des graphes, il n'y a aucune difficulté à situer le sujet. La théorie a eu son développement propre, inspiré de la topologie combinatoire (*cf.*, par exemple, le problème des quatre couleurs) et de certaines applications (*cf.*, par exemple, les réseaux de transport, le problème du voyageur de commerce.)

Si l'on examine maintenant les rubriques de la section 05 A ("Classical combinatorial problems") de *Mathematical Reviews*, on peut lire les expressions suivantes (traduites en français : "problèmes de choix (sous-ensembles, représentants, permutations)," "factorielles," "coefficients binomiaux," "fonctions combinatoires," "problèmes combinatoires d'énumération," "fonctions génératrices," "partitions," "identités combinatoires," "inégalités combinatoires," "non Inclus ci-dessus, mais dans cette section." Cette description semble bien vieillotte et les rédacteurs de *Mathematical Reviews* seraient bien inspirés de la rafraîchir quelque peu. Si on la conserve un instant, on se rend compte qu'il n'y a aucune structure, aucun modèle dans cette liste, contrairement à ce qui se passait dans les domaines des

rubriques 05 B et 05 0C. On y fait du calcul (“factorielles, coefficients binomiaux, fonctions génératrices, ...”), mais du calcul de quoi ? sur quoi ? On observe déjà à ce niveau une différence fondamentale entre, d’une part, les disciplines des sections 05 B et 06 C et, d’autre part, les sujets décrits dans 05 A. Leur seul point commun est *l’étude de structures discrètes*. Tandis que dans 05 B et 05 C on trouve des structures propres aux disciplines étudiées, la section 05 A doit emprunter ses sujets aux autres branches des mathématiques et aux applications. Elle les analyse ensuite selon sa propre méthodologie, puisant dans les fortes traditions du calcul et s’inspirant aussi de certains domaines d’application.

3. Le renouveau du calcul

La liste des rubriques donnée plus haut de la sous-section 05 A de *Mathematical Reviews* décrit partiellement ce qu’on appelait *algèbre classique* au début de ce siècle, par rapport à *algèbre moderne*. Celle-ci s’est développée avec l’étude et la recherche systématique des structures dites fondamentales. L’aspect calculatoire de l’algèbre si florissant au début du siècle s’est soudain arrêté dans les années vingt, disons après la publication de l’ouvrage monumental de MACMAHON [8] sur l’analyse combinatoire.

Or, on assiste depuis quelques années à un renouveau du calcul, à une recherche de l’explicite dans beaucoup de domaines des mathématiques. Ce renouveau et cette recherche s’exercent à la fois de l’intérieur pour une meilleure compréhension des structures étudiées, mais aussi sous la pression de disciplines appliquées comme la statistique et l’informatique. Il a donc fallu reprendre les vieux travaux d’algèbre classique du début du siècle. A titre d’exemple, notons que deux représentants de cette discipline ont eu leurs œuvres complètes éditées et publiées récemment (YOUNG [6] et MACMAHON [7]). La relecture de ces travaux se fait naturellement avec un œil nouveau. Même si on avait au début du siècle les techniques nécessaires pour démontrer la plupart des résultats contemporains de combinatoire, c’est aujourd’hui qu’on peut vraiment les traiter, tant la nature des questions que l’on se pose est différente. On pourrait dire, paradoxalement, que c’est grâce à la remise en forme des mathématiques par Bourbaki dans les années 40-60 que la combinatoire actuelle a pu s’épanouir.

4. Statistique et informatique

La statistique a été développée par des praticiens qui faisaient des calculs à la main. Ils ont, de ce fait, mis au point des techniques extrêmement raffinées et sont à l’origine de la découverte d’identités remarquables sur

les fonctions génératrices (*cf.*, par exemple, l'ouvrage de DAVID et BARTON [8]). Les statisticiens calculant des distributions de variables aléatoires ont obtenu beaucoup de formules explicites, en particulier dans l'étude des statistiques d'ordre. Ces calculs faisaient ou non partie du corpus des identités fondamentales sur les fonctions spéciales. Si oui, on avait alors une interprétation originale de formules de l'analyse classique. Le problème réciproque s'imposait de lui-même. Pourquoi d'autres formules fondamentales de l'analyse classique ne s'interpréteraient-elles pas de la même façon? Y a-t-il un modèle statistique sous-jacent à toutes les identités classiques? C'est une des questions-clés qui fascine et guide maint spécialiste contemporain de combinatoire. Ce point sera repris plus loin.

L'informatique, quant à elle, ne s'est développée que depuis vingt ans. Songeons que le mot lui-même a été construit de toutes pièces, à partir des mots "information" et "automatique" à la fin des années soixante. Les premiers théoriciens de l'informatique ont dû manipuler des structures, discrètes par nature même, et faire des comptages. Ils se sont naturellement tournés vers les ouvrages de "problèmes combinatoires classiques." Dans les trois volumes parus de KNUTH [9], on peut constater que les premier et troisième tomes sont consacrés, pour moitié, à des exposés de combinatoire (comptages fondamentaux, manipulation de fonctions génératrices, réarrangements). L'informatique est un gros demandeur de techniques de mathématiques discrètes. Tout le tri informatique, par exemple, n'est qu'une étude statistique du groupe symétrique. Cet aspect particulier sera également repris plus loin.

5. La combinatoire classique

Donnons maintenant une liste partielle (et forcément partielle!) des problèmes combinatoires classiques étudiés à l'heure actuelle. Nous ne parlerons que des thèmes suivants :

- (a) les problèmes combinatoires de l'algèbre commutative;
- (b) la théorie combinatoire des invariants;
- (c) étude combinatoire des fonctions spéciales;
- (d) étude statistique du groupe symétrique;
- (e) la théorie des q -séries;
- (f) la mise au point d'outils algébriques.

(a) Les problèmes combinatoires de l'algèbre commutative. Ces problèmes ont été développés par STANLEY [10, 11] et son école du M.I.T. L'étude des anneaux de Cohen-Macaulay a fait apparaître des

problèmes sur des structures discrètes. On dispose désormais d'une théorie très séduisante des ensembles partiellement ordonnés dits de Cohen-Macaulay, qui apporte un éclairage nouveau sur le problème de la structure des idéaux d'un anneau (*cf.* [12, 18, 14]). Deux des problèmes initiaux étudiés par STANLEY étaient, d'une part, d'évaluer le nombre $H_n(r)$ de matrices $n \times n$ à coefficients entiers positifs dont la somme de chaque ligne et chaque colonne était égale à un nombre fixé r , d'autre part, de calculer le nombre de faces d'un complexe simplicial. L'étude de ces deux questions l'a conduit à découvrir et démontrer de nouveaux résultats d'algèbre commutative, qu'on peut voir développés dans la monographie qu'il vient de publier [16].

(b) La théorie combinatoire des invariants. — Cette théorie a été initialisée et développée par ROTA et son école [6, 17, 18]. De nouveaux objets ont été mis en évidence, notamment les bidéterminants, qui pourraient permettre une meilleure compréhension des algorithmes liés à la représentation du groupe symétrique.

(c) L'étude combinatoire des fonctions spéciales. — Cette étude a été abordée notamment par l'école lotharingienne [19, 20, 21]. Comme indiqué plus haut, la problématique est directement inspirée de la statistique : toute identité ne serait que le comptage par deux voies différentes d'une même suite de structures qu'il s'agit de mettre en évidence. Les formules qui se prêtent le mieux à un tel traitement sont les identités sur les séries de polynômes.

Par exemple, les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ ($n \geq 0$) définis par

$$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

ont une fonction génératrice de la forme

$$\sum_n P_n^{(\alpha, \beta)}(x) u^n = 2^{\alpha+\beta} R^{-1} (1-u+R)^{-\alpha} (1+u+R)^{-\beta} \quad (n \geq 0).$$

avec $R = (1 - 2xu + u^2)^{1/2}$. On peut obtenir l'expression de cette fonction génératrice par des techniques combinatoires (*cf.* [23]). On introduit, pour cela, une suite de structures discrètes, les *endofonctions de Jacobi*, qu'on compte par deux voies différentes pour donner les deux membres de l'identité ci-dessus. Cette méthode a l'avantage de montrer pourquoi le second membre est un produit de trois séries et d'expliquer l'apparition du radical R .

L'intérêt de cette recherche est tout d'abord de trouver des démonstrations combinatoires, donc élémentaires, de ces identités, souvent prouvées par des techniques analytiques élaborées, ensuite de trouver les extensions naturelles suggérées par le modèle combinatoire. L'étape ultérieure échappe alors à la combinatoire : si l'extension trouvée est suffisamment belle ou naturelle, elle doit fournir un nouvel outil à l'analyste. On a pu prouver, par exemple, une extension multilinéaire de la formule de Hille-Hardy pour les polynômes de Laguerre [28], qui attend de trouver son usage dans l'analyse.

ASKEY et WILSON [24] ont construit un diagramme des polynômes orthogonaux qui respecte leur hiérarchie hypergéométrique. On sait traiter combinatoirement les identités des polynômes du bas du diagramme (Hermite, Laguerre, Meixner). Lorsqu'on s'élève dans la hiérarchie, les séries qui apparaissent sont des séries de faculté, moins faciles à manipuler.

Signalons, enfin, que VIENNOT [25] a développé une théorie combinatoire de plusieurs polynômes orthogonaux, qui rend compte des formules de récurrence, du calcul des moments, de la détermination de la fonction poids...

(d) L'étude statistique du groupe symétrique. — Par statistique sur le groupe symétrique, il faut entendre toute fonction définie sur ce groupe, dépendant explicitement de l'ordre total de $\{1, 2, \dots, n\}$ sur lequel le groupe agit. Par exemple, si $a = a(1)a(2)\dots a(n)$ est une permutation de la suite $12\dots n$, le nombre d'entiers i compris entre 1 et $(n-1)$ pour lesquels $a(i)$ est plus grand que $a(i+1)$ est une statistique sur le groupe symétrique appelé *nombre de descentes*. La somme de ces entiers i , appelée *indice majeur*, en est une autre, tout comme le *nombre d'inversions*, classiquement utilisé (cf. [28]). Plusieurs distributions univariées ou multivariées de ces statistiques ont été calculées et font apparaître des fonctions classiques de l'analyse. Les résultats obtenus sont utilisés dans le tri informatique, où l'on mesure ainsi le degré de dérangement d'une suite à trier. D'autre part, par définition même, toutes les statistiques d'ordre sont des statistiques sur le groupe symétrique. Enfin, d'un point de vue théorique, cette étude fournit des techniques nouvelles pour la théorie des q -séries (cf. [27, 28, 29, 80]).

À ce groupe de recherche se rattachent toutes les études sur les tableaux de Young et leurs dérivés (cf. [31, 32, 38, 3]) qui jouent un rôle essentiel dans la représentation du groupe symétrique. On doit à SCHÜTZENBERGER d'avoir initialisé et développé la combinatoire des tableaux, et, par son *jeu de taquin*, d'avoir proposé une géométrie naturelle pour tous les calculs [35, 36, 37, 38]

(e) **La théorie des q -séries.** — On trouve là un vaste champ d'étude incluant les fonctions thêta, les fonctions hypergéométriques basiques de Heine, les q -polynômes orthogonaux, les partitions d'entiers. L'étude statistique du groupe symétrique décrite plus haut fait apparaître des q -séries classiques. À la suite des travaux de SELBERG [39], MACDONALD [40] a donné plusieurs conjectures sur des identités entre q -séries. Ces conjectures sont de nature combinatoire en ce sens qu'il s'agit de démontrer que le terme constant d'une série de Laurent est donné par un polynôme explicite en une variable. Si l'on dispose déjà de techniques combinatoires pour le maniement des q -séries, notamment pour l'étude des congruences et des divisibilités [41, 42, 43], il reste beaucoup à inventer avant d'aborder l'examen de ces conjectures. Cependant, la conjecture d'ANDREWS qui avait motivé MACDONALD à poser ces nouveaux problèmes, vient d'être démontrée par BRESSOUD et ZEILBERGER par des techniques complètement combinatoires [44]. Posons

$$\begin{aligned}(y; q)_0 &= 1; \\ (y; q)_n &= (1 - y)(1 - gy) \cdots (1 - q^{n-1}y) \quad (n \geq 1).\end{aligned}$$

Il s'agissait de démontrer que le terme constant de l'expression

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i/x_j; q)_{a_i} (qx_j/x_i; q)_{a_j}$$

était égal à

$$\frac{(q; q)_{a_1 + \cdots + a_n}}{(q; q)_{a_1} \cdots (q; q)_{a_n}}.$$

Pour $q = 1$, on retrouve l'identité classique de Dyson [45, 46, 47]. Plusieurs auteurs [48, 49] ont aussi construit des modèles pour manipuler les q -séries. Pourtant, il faut dominer plusieurs sujets pour venir à bout de certaines conjectures classiques comme ANDREWS (50) a si bien eu le montrer, ainsi que MACDONALD [61, p. 81-52], qui a modestement reproduit dans les exercices de son livre sa preuve originale d'une conjecture de MACMAHON sur les partitions planes.

On voit apparaitre depuis quelque temps le terme ambigu de “preuve bijective” pour désigner une démonstration s'appuyant sur des constructions explicites de bijections entre structures. On essaie de trouver de telles preuves dans la théorie des partitions, qui fourmille d'énoncés de nature combinatoire pour lesquels on n'a souvent que des démonstrations analytiques. Récemment pourtant, GARSIA et MILNE [532] ont réussi le tour de

force d’obtenir une “preuve bijective” des identités de Rogers-Ramanujan

$$\sum_n \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \prod_n \frac{1}{(1 - q^{5n+1})(1 - q^{5n+4})} \quad (n \geq 0);$$

$$\sum_n \frac{q^{n(n+1)}}{(q; q)_n} = \prod_n \frac{1}{(1 - q^{5n+2})(1 - q^{5n+3})} \quad (n \geq 0).$$

Pour établir la première identité, ils ont construit une bijection envoyant . chaque partition de n ayant des parts différant au moins de deux unités sur une partition dont les parts sont congrues à 1 ou 4 (mod 5). Leur bijection, bien que tout à fait explicite, nécessite une suite d’étapes qu’on ne peut prévoir *a priori*. Sans doute, faudrait-il faire l’analyse des algorithmes employés. Peut-être aussi que le style “tout bijectif” a désormais ses limites. Notons enfin que HARDY [53, p. 91] disait déjà à propos des démonstrations de ces identités; “no doubt it would be unreasonable to expect a really easy proof.” Une dernière remarque pour mentionner que ces identités sont réapparues à de nombreuses occasions récemment, en particulier dans les ouvrages de mécanique statistique [54, 55].

(f) La mise au point d’outils algébriques. — Le traitement des problèmes décrits plus haut a rendu nécessaire la création d’outils algébriques originaux. On citera la très célébrée inversion de Möbius [56, 57], le composé partitionnel [58, 59], la théorie des espèces de structures [60, 61] développée par l’école québécoise, une combinatoire des fractions continues [62], une algèbre du calcul basique ([63],...) Ici apparaissent les premières structures propres au sujet, qui devraient amener à la fois un enrichissement théorique et une plus grande audience de cette discipline.

Pour terminer, citons les. travaux de mise au point réalisés dans le cadre des Séminaires lotharingiens de combinatoire (Bayreuth, Erlangen, Strasbourg) [64-69]. (**)

6 Conclusion

La liste des problèmes donnés au paragraphe précédent est très provisoire. D’autres questions vont surgir. Appelons *combinatoire classique* l’ensemble des méthodes qui aspirent à la découverte des structures discrètes sous-jacentes à des problèmes de calcul d’analyse ou de calcul algébrique. Pendant longtemps, cette combinatoire va devoir se nourrir des autres

(**) Note ajoutée dans cette réimpression de 2021 : les fascicules de ces séminaires ont été reproduits partiellement ou totalement sur le site électronique :
<https://www.mat.univie.ac.at/~slc/>

branches des mathématiques. Sa théorisation ne se fera que plus tard. Pour le moment, ses adeptes se doivent d'accumuler les matériaux, regarder les problèmes classiques des mathématiques d'un œil nouveau et rester attentifs aux préoccupations des praticiens. Chemin faisant, les spécialistes de cette combinatoire écrivent, peut-être sans le savoir, le cours de "calculus" du vingt-et-unième siècle.

RÉFÉRENCES

- [1] HALL Jr. (M.). — *Combinatorial Theory*. — Waltham, Mass, Blaisdell, 1967.
- [2] VAN LINT (J.H.). — *Introduction to Coding Theory*. — New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982.
- [3] CONWAY (J.H.). — A group of order 6,816,558,618,066,720,000, *Bull. London Meth. Soc.*, t. **1**, 1969, p. 70-88.
- [4] GRIESS Jr. (R.L.). — The Friendly Giant, *Inventiones Math.*, t. **69**, 1962, p. 1-102.
- [5] MACMAHON (P.A.). — *Combinatory Analysis*, vol. 1 et 2. — Cambridge Univ. Press, 1915 (réimprimé par Chelsea, New York, 1965).
- [6] YOUNG (A.). — *Collected papers* [G. de Beauregard Robinson, ed.]. — Toronto, University of Toronto Press, 1979.
- [7] MACMAHON (P.A.). — *Collected papers* [G.E. Andrews, ed.]. — Cambridge, M.I.T. Press, 1976.
- [8] DAVID (F.N.) and BARTON (D.E.). — *Combinatorial Chance*. — London, Griffin, 1952.
- [9] KNUTH (D.E.). — *The Art of Computer Programming*, vol. 1 et 3. — Don Mills, Ontario, Addison-Wesley, 1966-1972.
- [10] STANLEY (R.P.). — Magic labelings of graphs, symmetric magic squares, systems of parameters and Cohen-Macaulay rings, *Duke Math. J.*, t. **48**, 1976, p. 511-531.
- [11] STANLEY (R.P.). — The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, *Studies in Appl. Math.*, t. **54**, 1975, p. 85-142.
- [12] BACLAWSKI (K.). — Cohen-Macaulay ordered sets, *J. Algebra*, t. **63**, 1980, p. 226-258.
- [13] BACLAWSKI (K.) and GARSIA (A.). — Combinatorial decompositions of a class of rings, *Advances in Math.*, t. **39**, 1981, p. 155-164.
- [14] GARSIA (A.). — Combinatorial methods in the theory of Cohen-Macaulay rings, *Advances in Math.*, t. **88**, 1980, p. 229-266.
- [15] STANLEY (R.P.). — *Combinatorics and Commutative Algebra*. — Boston, Birkhäuser, 1988 (Ser. *Progress in Math.*, **41**).

- [16] DOUBILET (P.), ROTA (G.-C.) and STEIN (J.). — On the Foundations of Combinatorial Theory : IX, Combinatorial Methods in Invariant Theory, *Studies Appl. Math.*, t. **58**, 1974, p. 185–216.
- [17] DOUBILET (P.) and ROTA (G.-C.). — Skew-symmetric invariant theory, *Advances in Math.*, t. **31**, 1976, p. 196–201.
- [18] DÉSARMÉNIEN (J.), KUNG (J.) and ROTA (G.-C.). — Invariant theory, Young bitableaux and combinatorics, *Advances in Math.*, t. **37**, 1978, p. 83–92.
- [19] FOATA (D.). — A combinatorial proof of the Mehler formula, *J. of Combinatorial Theory*, ser. A, t. **24**, 1978, p. 367–376.
- [20] DUMONT (D.). — Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi, *Advances in Math.*, t. **41**, 1981, p. 1–39.
- [21] GARSIA (A.M.) and REMMEL (J.). — A combinatorial interpretation of q -derangements and q -Laguerre numbers, *Europ. J. Combinatorics*, t. **1**, 1980, p. 47–59.
- [22] FOATA (D.) et LEROUX (P.). — Polynômes de Jacobi, interprétation combinatoire et fonction génératrice, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **87**, 1983, p. 47–53.
- [23] FOATA (D.) et STREHL (V.). — Une extension multilinéaire de la formule d'Erdélyi pour les produits de fonctions hypergéométriques confluentes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. **308**, 1981, p. 517–520.
- [24] ASKEY (R.) and WILSON (J.). — *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*. — Providence, Amer. Math. Soc., 1968 (Collection of the Memoirs).
- [25] VIENNOT (G.). — Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux, Notes de séminaire, Univ. Québec à Montréal, 1983.
- [26] GESSEL (I.). — Generating functions and enumeration of sequences, Ph. D. thesis, Dept. Math., M.I.T., Cambridge, 111 p., 1977.
- [27] CARLITZ (L.). — A combinatorial property of q -Eulerian numbers, *Amer. Math. Monthly*, t. **88**, 1975, p. 51–54.
- [28] GARSIA (A.M.) and GESSEL (I.). — Permutation statistics and partitions, *Advances in Math.*, t. **81**, 1979, p. 288–305.
- [29] DÉSARMÉNIEN (J.). — Fonctions symétriques associées à des suites classiques de nombres, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. **16**, 1983, p. 271–304.
- [30] RAWLINGS (D.). — Generalized Worpitsky identities with applications to permutation enumeration, *Europ. J. Combinatorics*, t. **2**, 1981, p. 67–78.
- [31] GRASSL (R.M.) and HILLMAN (A.P.). — Reverse plane partitions and tableau hook numbers, *J. Combinatorial Theory*, ser. A, t. **21**, 1976, p. 216–221.

- [32] GRASSL (R.M.) and HILLMAN (A.P.). — Functions on tableau frames, *Discrete Math.*, t. **25**, 1979, p. 245–255.
- [33] SAGAN (B.). — An analog of Schensted's algorithm for shifted Young tableaux, *J. Combinatorial Theory*, ser. A, t. **27**, 1979, p. 10-18.
- [34] STANTON (D.W.) and WHITE (D.E.). — A Schensted algorithm for rim hook tableaux, Dept. of Math., Univ. Minnesota, no. 82-151, 1963.
- [35] SCHÜTZENBERGER (M.P.). — Quelques remarques sur une construction de Schensted, *Math. Scand.*, t. **12**, 1963, p. 117–128.
- [36] SCHÜTZENBERGER (M.P.). — La correspondance de Robinson, *Combinatoire et représentation du groupe symétrique* [Actes Table Ronde C.N.R.S., Strasbourg. 1976], p. 59–113. — Berlin, Springer-Verlag (*Lecture Notes in Math.*, **79**, 1977).
- [37] LASCOUX (A.) et SCHÜTZENBERGER (M.P.). — Le monoïde plaxique, *Non-commutative structures in algebra and geometric combinatorics* [A. de Luca, ed., Napoli. 1976], p. 120–156. — Roma, Consiglio Nazionale delle Ricerche (*Quaderni de "La Ricerca Scientifica,"* **108**, 1981).
- [38] LASCOUX (A.) et SCHÜTZENBERGER (M.P.). — Polynômes de Schubert, *C.R. Acad. Sc. Paris.*, t. **294**, 1982, p. 447–450.
- [39] SELBERG (A.). — Bemerkninger om et Multiplet Integral, *Norsk. Mat. Tidsskr.*, t. **26**, 1944, p. 71–78.
- [40] MACDONALD (I.G.). — Some conjectures for root systems, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, t. **18**, 1982, p. 988–1007.
- [41] ANDREWS (G.E.) and GESSEL (I.). — Divisibility properties of the q -tangent numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **68**, 1978, p. 380–381.
- [42] FOATA (D.). — Further divisibility of the q -tangent numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, t. **81**, 1981, p. 143–148.
- [43] DÉARMÉNIEN (J.). — Un analogue des congruences de Kummer pour les q -polynômes d'Euler, *Europ. J. Combinatorics.*, t. **8**, 1982, p. 19–28.
- [44] ZEILBERGER (D.) and BRESSOUD (D.M.). — A proof of Andrews q -Dyson conjecture, Penn. State Univ., Dept. Math., Research Report no. 840021, 1983.
- [45] ANDREWS (D.E.). — Problems and prospects for basic hypergeometric functions, *Theory and Applications of Special Functions* [R. Askey, ed.], p. 191–294. — New York, Academic Press, 1975.
- [46] GOOD (I.J.). — Short proof of a conjecture of Dyson, *J. Math. Phys.*, t. **41**, 1970, p. 1884.
- [47] ZEILBERGER (D.). — A combinatorial proof of Dyson's conjecture, *Discrete. Math.*, t. **41**, 1982, p. 317–321.

- [48] ROMAN (N.) and ROTA (G.-C.). — The umbral calculus, *Advances in Math.*, t. **37**, 1978, p. 95–188.
- [49] CIGLER (J.). — Operatormethoden für q -Identitäten, *Monatshefte*, t. **88**, 1979, p. 87–105.
- [50] ANDREWS (G.E.). — The Lusztig-Macdonald-Wall conjecture, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, t. **77**, 1980, p. 36–42.
- [51] MACDONALD (I.G.). — *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford, Clarendon Press, 1978.
- [52] GARSIA (A.M.) and MILNE (S.C.). — A Rogers-Ramanujan Bijection, *J. Combinatorial Theory*, ser. A, t. **81**, 1981, p. 289–339.
- [53] HARDY (G.H.). — *Ramanujan*. — New York, Chelsea, 3^e ed., 1978 (originellement publié par : Cambridge Univ. Press, 1940).
- [54] BAXTER (R.J.). — *Exactly solved models in statistical mechanics*. London, New York, Academic Press, 1982.
- [55] VIENNOT (G.). — Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, Sémin. Bourbaki, exposé no. 626, fév. 1984.
- [56] ROTA (G.-C.). — On the Foundations of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius functions, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, t. **2**, 1964, p. 340–368.
- [57] CONTENT (M.), LEMAY (F.) et LEROUX (P.). — Catégories de Möbius et fonctorialités : un cadre général pour l'inversion de Möbius, *J. Combinatorial Theory*, ser. A., t. **28**, 1980, p. 169–190.
- [58] FOATA (D.) et SCHÜTZENBERGER (M.P.). — *Théorie géométrique des polynômes eulériens*. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (Lecture Notes in Math., **188**).
- [59] FOATA (D.). — *La série géométrique exponentielle dans les problèmes d'énumération*. — Montréal, Presses de l'Université de Montréal, 1974.
- [60] JOYAL (A.). — Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Math.*, t. **8**, 1981, p. 1–62.
- [61] LABELLE (G.). — Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Advances in Math.*, t. **42**, 1981, p. 217–247.
- [62] FLAJOLET (Ph.). — Combinatorial aspects of continued fractions, *Discrete Math.*, t. **32**, 1980, p. 125–161.
- [63] VIENNOT (G.). — *Algèbres de Lie et monoïdes libres*. — Berlin, Springer-Verlag, 1978 (*Lecture Notes in Math.* **691**).
- [64] FOATA (D.) (ed.). — *Séminaire Lotharingien de combinatoire (Bayreuth, Erlangen, Strasbourg)*, première et troisième sessions [Strasbourg, 8–9 mars 1980 et le Kleebach, 2–3 février 1981], résumés des comm., 31 pages. — Publ IRMA Strasbourg, 140/S-02, 1981.

- [65] DÉSARMÉNIEN (J.) (ed.). — *ibid* — , 5^e session [Sainte-Croix-aux-Mines, 7-8 décembre 1981], Actes du séminaire, 104 pages. — Publ. IRMA Strasbourg, 182/S-04, 1982.
- [66] STREHL (V.) (ed.). — *ibid* — , 6^e session [Burg Feuerstein. 29 sept.–1er oct. 1982], Actes du séminaire, 128 pages. — Publ. IRMA Strasbourg, 191/S-05, 1982.
- [67] KERBER (A.) (ed.). — *ibid* — , 7^e session [Donndorf bei Bayreuth. 30 janv.–2 fév. 1983], Actes du séminaire, 88 pages. — Publ. IRMA Strasbourg, 213/S-06, 1983.
- [68] FOATA (D.) (ed.) . — *ibid* — , 8^e session [Sainte-Croix-aux-Mines. 8 mai 1983], Actes du séminaire.. — Publ. IRMA Strasbourg, 229/S-08, 1984.
- [69] BARON (G.) u. KIRSCHENHOPER (P.) (eds.). — *ibid* — , 9^e session [Hollabrunn. 13–15 sept. 1983], Actes du séminaire, 173 pages. Publ. IRMA Strasbourg, 230/S-09, 1984.