Mis à jour le 20 janvier 2021.

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Programme

Toute applications dans le cours sauf indication contraire sont supposé infiniment différentiables ou lisses.

1. Définition : Par un *domaine* de $\mathbb{R}^n$ on désigne un sous-ensemble ouvert.
2. Courbes paramétrées et non paramétrées.

   Définition : Une *courbe non-paramétrée* dans le plan est l'ensemble de solutions d'une équation $f(x, y) = 0$.

   Définition : Une *courbe paramétrée* dans l'espace $\mathbb{R}^n$ est une application lisse $U \to \mathbb{R}^n$, ou U est un domaine dans $\mathbb{R}$.
3. Norme.

   Définition : Dans le cours par la *norme* on sous-entend la longueur euclidien.

   Notation : La norme de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est noté par $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
4. Vecteur tangent. Espace tangent.

   Définition : Deux courbes paramétrées $\gamma_1 : U_1 \to \mathbb{R}^n$ et $\gamma_2 : U_2 \to \mathbb{R}^n$, où U_1 et U_2 sont des voisinages de 0, sont *equivalentes* si $||\gamma_1(t) - \gamma_2(t)|| = o(t)$.

   Définition : Un *vecteur tangent* dans $\mathbb{R}^n$ est une classe d'équivalence des courbes paramétrées. On dit qu'un vecteur représenté par une courbe γ est un vecteur tangent dans le point $\gamma(0)$. L'espace de vecteurs tangents dans un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n noté T_x.

   Proposition : Une base T_x est donnée par les vecteurs correspondants aux courbes $\gamma_i(t) = (x_1, \dots, x_i + t, x_n)$. On appelle cette base la *base standard*. Les éléments de cette base sont notés $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.
5. Dérivée directionnelle.

   Définition : Une *dérivée directionnelle* d'une d'une fonction f par rapport à un vecteur tangent v représenté par la courbe paramétrée γ_v est $\left.\dfrac{\partial f(\gamma_v(t))}{\partial t}\right|_{t=0}$.
6. Dérivée partielle. [S, p.26].

   Définition : La *dérivée partielle* d'une fonction f dans un point x par rapport à une coordonnée x_i est sa dérivée directionnelle par rapport à la courbe $\gamma_i(t) = (x_1, \dots, x_i + t, x_n)$. Notation : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\dfrac{\partial}{\partial x_i} f$.

   Définition équivalente : $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h}$

7. Application lisse.

   Définition : Une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ où U est un domaine dans $\mathbb{R}^k$, est *lisse* si toutes ces dérivées partielles multiples sont définies.

   Remarque : Toutes applications dans le cours sont sous-entendues lisses.

8. Commutativité de dérivées partielles (Théorème de Schwarz).

   Théorème (Schwarz) [R, p.235] : Pour toute fonction f lisse sur un domaine U on a $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

9. Différentielle d'une application.

   Définition : Soit $f : U \to \mathbb{R}^k$ une application lisse. La *différentielle* de l'application f dans un point $u \in U$ est une application $D_f : T_u \to T_{f(u)}$ définie par $D_f(v) = f(\gamma_v)$.

   Observation : Si $f : U \to V$ et $g : V \to W$ sont des applications lisses alors $D(f(g)) = D(f)D(g)$.

10. Matrice jacobienne.

    Définition : Matrice jacobienne $D(f)_i^j$ d'une application $f : U \to \mathbb{R}^n$ est la matrice de l'application $D(f)$ écrite dans la base standard. Elle s'écrit comme $D(f)_i^j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, où $x_1, \dots, x_k$ sont les coordonnées dans U.

    Conséquence de l'observation (règle de la chaîne) : Si f est application lisse alors

    $$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial f_1}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial f_1} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial f_1}$$

    .

11. Difféomorphisme.

    Définition : Une application $f : U \to \mathbb{R}^n$, où U est un domaine dans $\mathbb{R}^n$ est un *difféomorphisme* si elle est injective, lisse et l'application inverse (définie sur l'image de U) est aussi lisse.

    Conséquence : La matrice jacobienne d'un difféomorphisme est inversible.

12. Fonctions inverse et implicite.

    Théorème [de la fonction inverse][R, p.221], [S, p.35] : Soient $f : U \to \mathbb{R}^n$, où $U \subset \mathbb{R}^n$, une application et $x \in U$ un point tel que $df|_x$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage $V \subset U$ de x et un voisinage W de $f(x)$ tel que la fonction $f|_V$ est un difféomorphisme entre V et W.

    Théorème [de la fonction implicite] : Soit $F : U \times V \to \mathbb{R}^n$, où $U \subset \mathbb{R}^m$ et $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $x \times y \in U \times V$ est tel que $F(x, y) = 0$ et $d_y F(x, y)$ est un isomorphisme. Alors il existe un voisinage U_1 de x est une fonction unique $f : U_1 \to V$ telle que $F(x, f(x)) = 0$.

13. Champ vectoriel.

Définition : Un *champ vectoriel* dans un domaine U de $\mathbb{R}^n$ est une association d'un vecteur tangent à chaque point de U.

Définition équivalente : Un *champ vectoriel* v dans un domaine U de $\mathbb{R}^n$ est un opérateur différentiel $v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ où $x_1, \ldots, x_n$ sont des coordonnées dans U et $a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions lisses sur U.

14. Dérivée de Lie d'une fonction.

Définition : Soient $v = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ un champs vectoriel est f une fonction sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^n$. La *dérivée de Lie* vf est la fonction sur U définie par $vf = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Remarque : Ne pas confondre avec le produit d'un champ vectoriel et une fonction $fv = fv_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + fv_n \frac{\partial}{\partial x_n}$.

15.* Commutateur de deux champs vectoriels.

Définition : Le *commutateur* de deux champs vectoriels v_1 et v_2 est un champ vectoriel noté par $[v_1, v_2]$ tel que pour toute fonction f on a $[v_1, v_2]f = v_1(v_2 f) - v_2(v_1 f)$

16. Famille lisse à 1 paramètre de difféomorphismes. (flot) Trajectoires. Champs vectoriel correspondant.

Définition : Soit $g_t : U_t \to V_t$ est une famille à 1 paramètre de difféomorphismes. Une *trajectoire* (ou *courbe intégrale*) de cette famille est une courbe paramétrée $g_t(x^0)$, où x^0 est un point de U_0.

Définition : Soit $g_t : U_t \to V_t$ est une famille à 1 paramètre de difféomorphismes. La famille de champs vectoriel correspondant à g_t est définie par $v_t f = \frac{\partial g(f_t(g))}{\partial t}\Big|_{t=0}$ pour toute fonction f sur U.

Définition équivalente : La famille de champs vectoriel correspondant à g_t est définie par $v_t = \dfrac{\partial g_i}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial g_1} + \cdots + \dfrac{\partial g_i}{\partial t}\dfrac{\partial}{\partial g_n}$.

Définition : Une famille à 1 paramètre de difféomorphismes g_t est un *groupe* à 1 paramètre de difféomorphismes si $g_{t_1}(g_{t_2}) = g_{t_1+t_2}$.

Théorème : Une famille à 1 paramètre de difféomorphismes est un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes si et seulement si le champ vectoriel correspondant ne dépend pas de t.

Conséquence : Soit γ une trajectoire d'une famille à 1 paramètre de difféomorphismes correspondant à un champ vectoriel v. Alors elle satisfait le système d'équations différentielles $\dfrac{\partial \gamma_i}{\partial t} = v_i(\gamma)$.

17. Théorème de Picard-Lindelöf. (Théorème de redressement.)

Théorème : Pour tout champ vectoriel lisse v il existe un et un seul groupe à 1 paramètre de difféomorphismes correspondant f_t satisfaisant la condition $g_0 = \mathrm{id}$.

Conséquence : Pour tout famille de champ vectoriel lisse v_t il existe une et une seule unique famille 1 paramètre g_t de difféomorphismes correspondante satisfaisant la condition $g_0 = id$.

Conséquence : Pour tout champ vectoriel lisse v tel que $v(x) \neq 0$ il existe un système de coordonnées dans un voisinage de x tel que dans ces coordonnée le champ v est constant.

18. Intégrale première.

    Définition : Une fonction f est une *intégrale première* d'un champ vectoriel v si vf=0 et f n'est pas constante.

    Observation : Si une fonction f est une intégrale première d'un champ vectoriel v et γ est une trajectoire de v alors $f(\gamma)$ est constante.

19. Solution formelle d'un système d'équations différentielles ordinaires.

$$x(t) = e^{vt}id = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} v^n id$$

    ou en coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

    Remarque : Cette identifié il faut comprendre dans le sens asymptotique, notamment si $x(t)$ est une vrai solution alors

$$\|x(t) - \sum_{k=0}^{N} \frac{t^n}{n!} v^n id\| = o(t^N)$$

    pour tout N.

20. Développement limité.

    Théorème :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n} (x_1 - a_1)^{k_1} \cdots (x_n - a_n)^{k_n}$$

    où

$$c_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \cdots \partial x_n^{k_n}} f(x_1, \ldots, x_n)|_{x_1=a_1,\ldots,x_n=a_n}$$

    Remarque : Le développement limité d'une fonction peut être formellement écrit comme

$$e^{b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + b_n \frac{\partial}{\partial x_n}} f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1 + b_1, \dots, x_n + b_n).$$

et alors il est la conséquence de la formule pour la solution formelle de l'équation différentielle ordinaire.

21. Ligne de niveau.

    Définition : La *ligne de niveau* $c \in \mathbb{R}$ d'une fonction f est l'ensemble $\{x | f(x) = c\}$.

    Observation : La ligne de niveau est perpendiculaire au gradient. La longueur du gradient est inversement proportionnelle à la distance de la ligne de niveau voisine.

22. Gradient.

    Définition : Le *gradient* d'une fonction dans $U \in \mathbb{R}^n$ est le champ vectoriel défini par

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

    Remarque : Le gradient dépend du système de coordonnées.

23. Point critique.

    Définition : Le point x est un *point critique* de la fonction f si la différentielle de f s'annule dans x.

    Définition équivalente : Le point x est un *point critique* de la fonction f si toutes les dérivées partielles de f s'annulent dans x.

24. Extremum local.

    Définition : Un point $x \in \mathbb{R}$ est un minimum local d'une fonction f si il existe un voisinage U de x tel que la restriction de f à U prend sa valeur minimal dans x.

25.* Transformation de Legendre.

    Définition : La transformée de Legendre d'une fonction $F(x_1, \dots, x_n)$ est la fonction $\hat{F}(p_1, \dots, p_n)$ définie par

$$\hat{F}(p_1, \dots, p_n) = \min F(x_1, \dots, x_n) - x_1 p_1 - \dots - x_n p_n.$$

    Remarque : La transformée de Legendre est bien définie si le minimum existe pour toutes les valeurs de $p_1, \dots, p_n$.

    Théorème : La transformation de Legendre est involutive, notamment si elle est défini on a

$$\hat{\hat{F}} = F$$

26. Matrice symétrique définie positive. Critère de Sylvester.

    Définition : La matrice symétrique a_{ij} est *définie positive* si la fonction $\sum a(x_1, \dots, x_n) = a_{ij} x_i x_j$ est strictement positive partout sauf l'origine.

La matrice a_{ij} est *définie négative* si la matrice $-a_{ij}$ est définie positive.

La matrice a_{ij} est *indéfinie* si elle est nondégénérée et n'est pas définie ni positive ni négative.

Théorème (Sylvester) : Une matrice symétrique a_{ij} est définie positive si et seulement si tous ces mineurs principaux $\det(a_{ij}|_{i,j\leqslant k})$ sont positives.

27. Matrice de Hesse.

    Définition : La matrice de Hesse d'une fonction f de n variables $x_1, \ldots, x_n$ est la matrice de ces dérivées secondes.

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

28. Condition suffisante d'un extremum.

    Théorème : Un point critique d'une fonction f est un minimum local si sa matrice de Hesse a_{ij} dans ce point est définie positive, maximum local si la matrice a_{ij} est défini négative, n'a pas d'extremum (a une selle) si la matrice a_{ij} est indéfinie.

    Remarque : On peut rien dire si la matrice de Hesse et dégénérée.

29. Extremum sous contrainte.

    Définition : Le maximum (resp. minimum) d'une fonction f sous contraintes $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$ et sa valeur maximale (resp. minimale) qu'elle prend dans les points satisfaisant $c_1(x) = \cdots = c_k(x) = 0$.

30. Point critique sous contrainte.

    Définition : Le point critique sous contraintes $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$ est le point x tel que les contraintes sont satisfaites et la différentielle de f s'annule sur tous les vecteurs tangents sur lesquels les différentielles de c_k s'annulent aussi.

31. Multiplicateurs de Lagrange.

    Théorème : Le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un point critique sous contraintes $c_1 = 0, \ldots, c_k = 0$ si il existe $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tel que le point (x, λ) est un point critique de la fonction $f + \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_k c_k$.

32. Différentielle d'une fonction.

    Définition : *Différentielle* d'une fonction f est une fonction sur l'espace de vecteurs tangents défini par

$$df(v) = \frac{\partial}{\partial t} f(\gamma_v)|_{t=0}.$$

    Observation : La différentielle d'une fonction peut être écrite comme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

.

33. 1-forme différentielle.

Définition : Une *1-forme différentielle* est une fonction sur l'espace de vecteurs tangents satisfaisant la condition

$\alpha(v_1 + \lambda v_2) = \alpha(v_1) + \lambda\alpha(v_2)$ pour tout point x et tout vecteurs $v_1, v_2 \in T_x$.

Observation : Toute 1-forme s'écrit comme $\alpha = a_1 dx_1 + \cdots a_n dx_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions.

34. Intégrale d'une 1-forme sur un chemin.

Définition : Soient $\alpha = a_1(x)dx_1 + \cdots + a_n(x)dx_n$ une 1-forme différentielle et $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ une courbe paramétrée. L'intégrale d'une 1-forme différentielle est

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b a_1(\gamma)d\gamma_1 + \cdots + a_n(\gamma)d\gamma_n$$

Remarque : L'intégrale d'une 1-forme sur un chemin ne dépend pas de sa paramétrisation. C'est une conséquence de la formule de changement de variable.

35. k-formes différentielles. Produit extérieur des formes.

Définition : L'espace de k-formes est engendré par le produits de k 1-formes. Le produit de 1-formes est associatif es antisymétrique : $\alpha\beta = -\beta\alpha$.

Remarque : Toute k-forme s'écrit de façon unique en coordonnée comme

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}$$

Notation : L'espace de k-forme sur un domaine U est noté par $\Omega^k(U)$.

Observation : Si $\alpha\ in\Omega^k(U)$ et $\beta \in \Omega^l(U)$ alors

$$\alpha\beta = (-1)^{kl}\beta\alpha$$

.

36* Produit intérieur.

Définition : Soit α une k-forme et v un champ vectoriel. Le *produit intérieur* de α par v noté par $i_v\alpha$ est une $k-1$ forme. Le produit intérieur possède des propriétés suivantes :

(a) $i_v(\alpha\beta) = (i_v\alpha)\beta + (-1)^k\alpha i_v\beta$;

(b) $i_v(i_w\alpha) = -i_w(i_v\alpha$;

(c) $i_v f = 0$ si f est une fonction.

(d) $i_v df = vf$ si f est une fonction.

Remarque : Si $v_1, \ldots, v_k$ sont les champs vectoriels et α une k-forme, alors $i_{v_1} \cdots i_{v_n}\alpha$ est une fonction noté par $\alpha(v_1, \ldots, v_k)$

37. Image réciproque d'une $k - forme$.

   Soit $\phi : U \to V$ une application lisse et α une k-forme sur V. L'*image réciproque* de α par rapport à l'application ϕ est une k-forme sur U noté par $\phi^*\alpha$ défini par les propriétés :

   (a) $\phi^* f = f \circ \phi$ si f est une 0-forme (fonction) ;

   (b) $\phi^* df = df \circ \phi$;

   (c) $\phi^* \alpha\beta = (\phi^*\alpha)(\phi^*\beta)$.

38.* Dérivée de Lie.

   Définition : Soient v un champ vectoriel et g_t le groupe à 1 paramètre de difféomorphismes correspondant. Soit α une k-forme. La *dérivée de Lie* $L_v\alpha$ de la forme α par rapport au champ vectoriel v est définie par

$$L_v\alpha = \frac{\partial}{\partial t} g_t^* \alpha$$

   Théorème : [Formule de l'homotopie, formule de Cartan]

$$L_v\alpha = i_v d\alpha + d i_v \alpha$$

   Consequences :

   (a) $L_f = vf$ si f est une fonction (0-forme) ;

   (b) $L_v\alpha\beta = (L_v\alpha)\beta + \alpha(L_v\beta)$;

39. Différentielle extérieure.

   Définition : *Différentielle extérieure* est un opérateur linéaire noté par d produisant une $k+1$-forme à partir d'une k forme qui satisfaisait les propretés suivantes :

   (a) $d^2 = 0$,

   (b) Si f est une fonction df est donnée par la définition 20,

   (c) Règle de Leibnitz $d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^k \alpha d\beta$, où $\alpha \in \Omega^k(U)$.

   Théorème :

$$d\alpha[v_1, \dots, v_{k+1}] = \sum_i (-1)^i v_i \alpha(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([v_i, v_j], v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, \hat{v}_j, \dots, v_k)$$

40. Intégrale défini. Théorème de Fubini.

   Définition : Soit $\Omega = \omega(x) dx_1 \cdots dx_n$ une n-forme sur un domaine $U \in \mathbb{R}^n$. *L'intégrale* de Ω sur U est la limite

$$\int_U \Omega := \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_p \mathrm{Vol}(U_p) \omega(x^p)$$

où U_p sont des parallélépipèdes (rectangulaires) dans $\mathbb{R}^n$, $U \subset \cup_p U_p$, le diamètre de chaque U_p et au plus ε, chaque parallélépipède U_p s'intersecte avec U, les intérieurs des rectangles ne s'intersectent pas, Vol note le volume d'un rectangle et x^p est un point arbitraire de U_p.

Théorème : L'intégrale ne dépend pas de coordonnées.

Définition équivalente (Théorème de Fubini) : Soit $\Omega = \Omega' dx_n$ est une n-forme sur une domaine $U \in \mathbb{R}^n$, et Ω' est une $(n-1)$-forme. Alors

$$\int_U \Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{U \cap \{x_n = t\}} \Omega' \right) dt$$

41.* Rotationnel et Divergence.

Terminologie : En dimension 3 les 1-formes

$$a dx + b dy + c dz$$

les 2-formes

$$A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

ainsi que les champs vectoriels

$$\mathfrak{a} \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{b} \frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{c} \frac{\partial}{\partial z}$$

sont paramétrés par les triplets de fonctions. Pour cette raison parfois on les identifie et les appelle « champs vectoriels ». On identifie aussi les fonctions f et les 3-formes $f dx dy dz$ et les appelle les « fonctions ».

La différentielles de 0-forme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

est appelé le *gradient*, la différentielle de 1-forme

$$d(a dx + b dy + c dz) = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx dy$$

est appelée le *rotationnel* et la différentielle de 2-forme

$$d(A dy dz + B dz dx + C dx dy) = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx dy dz$$

est appelée la *divergence*.

42. Formes fermées et exactes :

Définition : On dit qu'une k-forme α est *fermée* si sa différentielle est la forme nulle $d\alpha = 0$. On dit qu'une k-forme α est *exacte* si elle est une différentielle d'une (k-1)-forme $\alpha = d\beta$.

Observation : Toute forme exacte est fermée.

43. Lemme de Poincaré.

Théorème : Toute forme fermée dans une domaine difféomorphe à un parallélépipède est exacte.

Exemple : Soit α une n-forme sur $U \in \mathbb{R}^n$. Elle s'écrit comme $\alpha = f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$. Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ est telle que $\frac{\partial}{\partial x_i} F(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$ — une primitive de f par rapport à la variable x_i. Alors $d(F dx_1 \cdots \widehat{dx_i} \cdots dx_n) = (-1)^i \alpha$.

44. Théorème de Stokes

Théorème [Newton, Leibnitz, Gauss, Ostrogradsky, Kelvin, Green, Stokes, Poincaré] : Soit U un domaine borné de R^n et soit ∂U son bord.

$$\int_U d\alpha = \int_{\partial U} \alpha$$

Consequence : Soit $\gamma, \gamma' : [0,1] \to U$ deux chemins avec les mêmes debut et fin et tels qu'on peut continument deformer γ en γ'. Alors

$$\int_\gamma \alpha = \int_{\gamma'} \alpha$$

.

Remarque : Plus formellement on dit que γ et γ' connectent les mêmes points si $\gamma(0) = \gamma'(0)$ et $\gamma(1) = \gamma'(1)$. On dit qu'on peut continument deformer γ en γ' si il existe une application lisse $\tilde{\gamma} : [0,1] \times [0,1] \to U$ telle que $\tilde{\gamma}(t,0) = \gamma(t)$, $\tilde{\gamma}(t,1) = \gamma'(t)$, $\tilde{\gamma}(0,s) = \gamma(0)$ et $\tilde{\gamma}(1,s) = \gamma(1)$.

Consequence : Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha = f(x_1, \ldots, x_n) dx_1, \ldots, dx_n$ une n-forme sur U. Alors

$$\int_D \alpha = \int_{\partial D} F(x_1, \ldots, x_n) dx_2, \ldots, dx_n,$$

où la fonction F est telle que $\frac{\partial F}{\partial x_1} = f$.

Références

[P] P.Pansu. Fonctions de plusieurs variables.

[S] M.Spivak. Calculus on Manifolds, Addison-Wesley 1965.

[R] W.Rudin. Principles of mathematical analysis. McGrow Hill 1976.

[A] V.Arnold. Équations différentielles ordinaires. MIR, 1981.