Année 2022-2023

Mathématiques L3 (S6) – Géométrie.

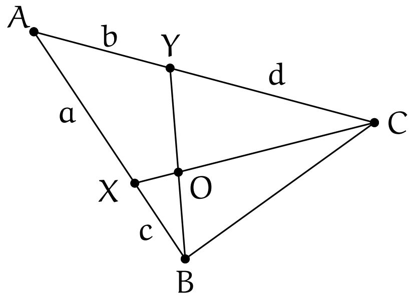
Contrôle continu.

6 mars 2023

Durée 1 heure 30 minutes.

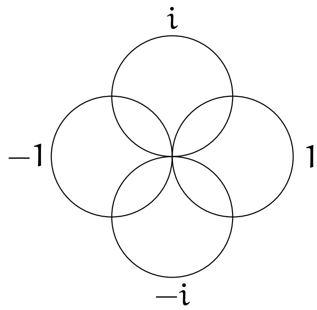
Utilisation de documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1.



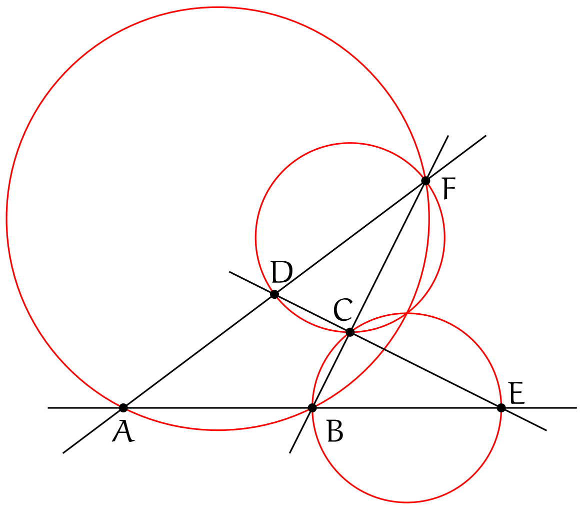
Soient $ABCD$ un triangle, X et Y deux points sur les côtés AB et AC, respectivement. Soit O l'intersection des segments BY et CX. Trouver le rapport de longueurs $|OX|/|OC|$ à partir des longueurs $a = |AX|$, $b = |AY|$, $c = |BX|$ et $d = |CY|$.

Exercice 2.



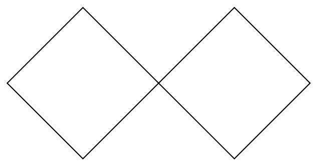
Trouver l'image par l'homographie $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ de la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$ de quatre cercles de rayon 1/2 passant par l'origine et les points ± 1 et $\pm i$.

Exercice 3.



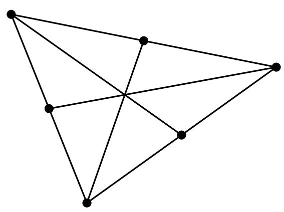
Soit $ABCD$ un quadrilatère, et $E = (AB) \cap (CD)$ et $F = (AD) \cap (BC)$ les points d'intersection de ces côtés. Montrer que les cercles circonscrits autour de triangles BCE, DCF et ABF sont concourants.

Exercice 4.



Trouver l'image par une transformation projective réelle d'un de deux carrés symétriques par rapport à un sommet commun à partir de l'image de l'autre.

Exercice 5.



Considérons un triangle avec trois médianes. Trouver l'image de cette configuration par une transformation du plan projectif réel qui envoie une des médianes à l'infini.

Correction :

1. Selon le théorème de Ménélaüs pour le triangle ABY et la droite XC on a

$$\frac{|OX|}{|OC|}\frac{|BA|}{|BX|}\frac{|YC|}{|YA|}=1$$

Substituant les longueurs données on obtient

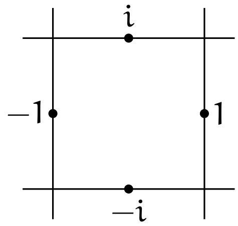
$$\frac{|OX|}{|OC|}\frac{a+c}{c}\frac{d}{b}=1$$

d'où

$$\frac{|OX|}{|OC|}=\frac{bc}{d(a+c)}$$

.

2. Les cercles passent par le point dont l'image est à l'infini. Alors les images des cercles deviennent droites. Deux cercles sont orthogonales à la droite réelle. Ce dernier reste à sa place, alors les image de ces cercles sont des droites verticales passant par 1 et -1 respectivement. De même, les deux autres sont horizontales passant par i et $-i$.



3. Soit M l'intersection des cercles circonscrit autour de FDC et BEC différent de C. Alors on a

$$[CDFM]=\frac{(M-C)(D-F)}{(M-F)(D-C)}\in\mathbb{R}$$

car C, D, F, M sont cocirculaires par construction.

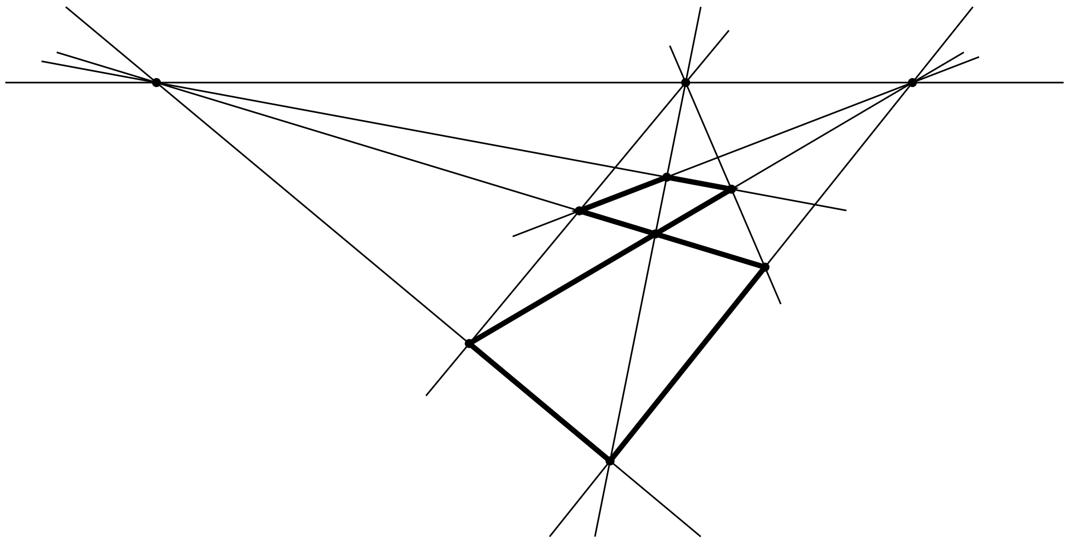
$$[BECM]=\frac{(M-B)(E-C)}{(M-C)(E-B)}\in\mathbb{R}$$

car C, D, F, M sont cocirculaires par construction.

$$[CDFM][BECM]=\frac{(D-F)(M-B)(E-C)}{(M-F)(D-C)(E-B)}=$$
$$=\frac{(D-F)}{(A-F)}\cdot\frac{(E-C)}{(D-C)}\cdot\frac{(A-B)}{(E-B)}\cdot\frac{(A-F)(M-B)}{(M-F)(A-B)}=$$
$$=\frac{(D-F)}{(A-F)}\cdot\frac{(E-C)}{(D-C)}\cdot\frac{(A-B)}{(E-B)}\cdot[BAFM]$$

Alors $[BAFM]$ est réel car tous les rapports dans la partie droite sont réels. Alors les points B, A, F, M sont cocirculaires.

4.



5.