Année 2023-2024

Mathématiques L3 (S6) – Géométrie.

Contrôle continu.

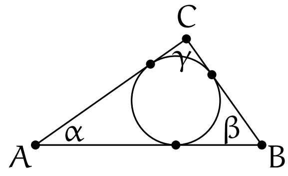
18 mars 2024

Durée 1 heure 30 minutes.

Utilisation de documents autorisée, mais pas encouragée.

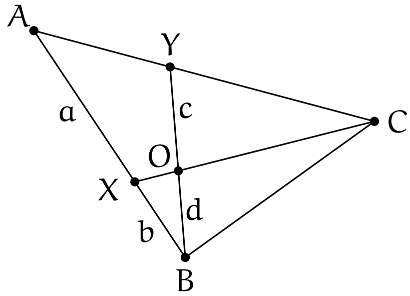
Exercice 1.

Soit ABC un triangle avec les angles respectifs α, β et γ. Trouver la composition de rotations $R_A^\alpha R_B^\beta R_C^\gamma$. *Indication :* Considérer les points de tangence du triangle avec le cercle inscrit.



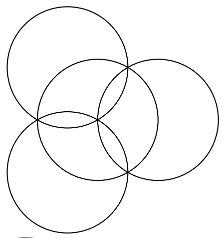
Exercice 2.

Soient $ABCD$ un triangle, X et Y deux points sur les côtés AB et AC, respectivement. Soit O l'intersection des segments BY et CX. Trouver le rapport de longueurs $|AY|/|CY|$ à partir des longueurs $a = |AX|$, $b = |BX|$, $c = |OY|$ et $d = |OB|$.



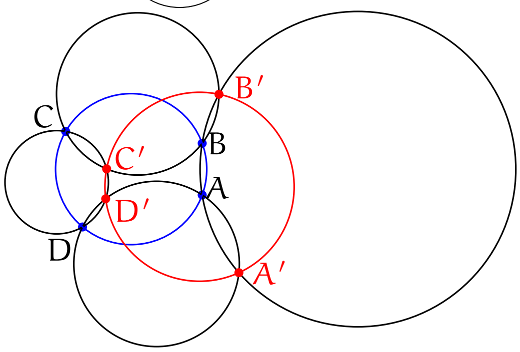
Exercice 3.

Trouver l'image par l'homographie $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ de la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$ de quatre cercles de rayon 1 et centré en 0, 1, $e^{2\pi i/3}$ et $e^{-2\pi i/3}$.



Exercice 4.

Soit A, B, C, D quatre points distinctes dans le plan. Quatre cercle passent par A et B, B et C, C et D, D et A, respectivement et s'intersectent (hormis en A, B, C, D) en quatre autres points A', B', C', D'. Montrer que $A'B'C'D'$ sont cocirculaires si et seulement si $ABCD$ sont cocirculaires.

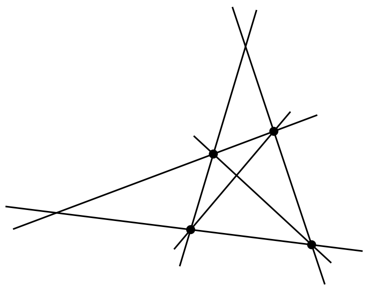


Exercice 5.

Considérons la configuration de six droites passant par quatre points données.

a. En combien de composantes connexes ces droites partagent le plan projectif réel $\mathbb{R}P^2$?

b. Trouver l'image de ces droites par une transformation qui envoie une des droites à l'infini.



Correction :

1. Soient A', B' et C' les points de tangence entre le cercle inscrit et la droite BC, CA et CA respectivement. C'est évident que $R_C^\gamma(B') = A'$ car $|CB'| = |CA'|$. De même $R_B^\beta(A') = C'$ et $R_A^\alpha(C') = B'$ et alors B' est un point fixe de $R_A^\alpha R_B^\beta R_C^\gamma$. Car $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ cette composition est la symétrie centrale de centre B'.

2. Selon le théorème de Ménélaüs pour le triangle ABY et la droite XC on a

$$\frac{|OY|}{|OB|}\frac{|XB|}{|XA|}\frac{|CA|}{|CY|} = 1$$

Substituant les longueurs données on obtient

$$\frac{c}{d}\frac{b}{a}\frac{|CY| + |AY|}{|CY|} = 1$$

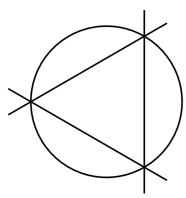
d'où

$$1 + \frac{|AY|}{|CY|} = \frac{cd}{ab}$$

et alors

$$\frac{|AY|}{|CY|} = \frac{cd - ab}{ab}$$

3. Trois cercles passent par l'origine et l'angle entre eux est $\pi/3$. Alors leur image est trois droites à l'angle $\pi/3$. Le quatrième cercle est invariant par l'homographie et passe par les points d'intersection des trois premiers cercles.



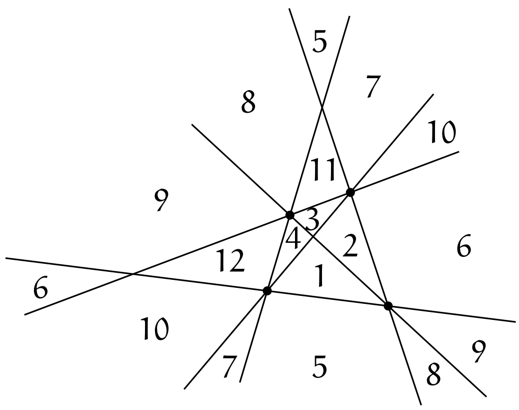
4. Le birapport $[A, B, A', B'] = \frac{(A-A')(B-B')}{(A-B)(A'-B')}$ est réel car les points A, B, A', B' sont cocirculaires. De même $[B, C, B', C'] = \frac{(B-B')(C-C')}{(B-C)(B'-C')} \in \mathbb{R}$, $[C, D, C', D'] = \frac{(C-C')(D-D')}{(C-D)(C'-D')} \in \mathbb{R}$, $[D, A, D', A'] = \frac{(D-D')(A-A')}{(D-A)(D'-A')} \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{[A, B, A', B'][C, D, C', D']}{[B, C, B', C'][D, A, D', A']} = \frac{(B - C)(D - A)}{(A - B)(C - D)}\frac{(B' - C')(D' - A')}{(A' - B')(C' - D')} = [A, C, B, D][A', C', B', D'] \in \mathbb{R}$$

Alors $[A, C, B, D]$ et $[A', C', B', D']$ sont réel en même temps.

5.

a :



b :