

L3 (S6) – Analyse complexe.

**Contrôle continu. Parcours magistère.**

04 avril 2025

*Durée 1 heure. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.***Exercice 1.**

Calculer la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$$

et déterminer son rayon de convergence.

**Exercice 2.**

Trouver l'ordre de la fonction

$$\text{Ord}_0 \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{e^{x^2/3}}{x^2} \right).$$

**Exercice 3.**Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions entières qui satisfont, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ 

$$f(e^{-n}) = e^{-n^2}.$$

**Exercice 4.**

Calculer l'intégrale

$$\int_{C(0,2)} \frac{z^2 + 5}{z^5 - 3z^4 - z + 3} dz,$$

où  $C(0,2)$  est le cercle de rayon 2 centré à 0 et parcouru dans le sens trigonométrique.**Exercice 5.**

Trouver la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$$

*Indication* : Utiliser le théorème des résidus pour la forme  $\frac{dz}{(z^2 + a^2) \sin \pi z}$  et le rectangle  $|\Re z| \leq 2N + 1/2, |\Im z| \leq N$ .

Correction :

$$\begin{aligned}
 1. \sum_{3n+1} \frac{z^{3n+1}}{3n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \zeta^{n-1} + \zeta^{2n-2}}{3} \frac{z^n}{n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \zeta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta z)^n}{n} + \zeta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta^2 z)^n}{n} = \\
 &= \boxed{-\ln(1-z) - \zeta^{-1} \ln(1-\zeta z) - \zeta^{-2} \ln(1-\zeta^2 z)}.
 \end{aligned}$$

Le rayon de convergence  $1/R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (3n+1)^{1/(3n+1)} = e^{\ln(3n+1)/(3n+1)} = \boxed{1}$ .

$$\begin{aligned}
 2. \frac{1}{x^2} - \frac{e^{x^2/3}}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2 x \exp(x^2/3)}{x^2 \sin^2 x} = \\
 &= \frac{x^2 - x^2(1 - x^2/6 + x^4/120)^2(1 + x^2/3 + x^4/18) + O(x^8)}{x^2 \sin^2 x} = \\
 &= \frac{x^6(-1/36 + 1/18 + 1/18 - 1/120 - 1/18) + O(x^8)}{x^2 \sin^2 x} = \\
 &= \frac{x^6/90 + O(x^8)}{x^2 \sin^2 x}. \text{ Donc } \text{Ord}_0 \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{e^{x^2/3}}{x^2} \right) = 6 - \text{Ord}_0(x^2 \sin^2 x) = \boxed{2}
 \end{aligned}$$

3. Soit  $\text{Ord}_0 f(z) = k$  donc  $f(z) = z^k g(z)$ . Donc  $f(e^{-n}) = e^{-n^2} = e^{-nk} g(e^{-n})$ .  
 D'où  $g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n^2+nk} = 0$ . Alors  $\text{Ord}_0 f(z) > k$ . Contradiction.  
 Donc telle fonction n'existe pas.

$$\begin{aligned}
 4. z^5 - 3z^4 - z + 3 &= z^4(z-3) - (z-3) = (z^4-1)(z-3). \\
 \text{Donc } \int_{C(0,2)} \frac{z^2+5}{z^5-3z^4-z+3} dz &= \int_{C(0,2)} \frac{z^2+5}{(z^4-1)(z-3)} dz = \int_{C(0,1/2)} \frac{w^{-2}(w^{-2}+5)}{(w^4-1)(w^{-1}-3)} dw = \\
 &= \int_{C(0,1/2)} \frac{w(1+5w^2)}{(1-w^4)(1-3w)} dw = 2\pi i \text{Res}_{1/3} \frac{w(1+5w^2)}{(1-w^4)(1-3w)} dw = \boxed{-\frac{7\pi i}{20}}.
 \end{aligned}$$

$$5. \sin(\pi(2N+1/2+it)) = \frac{e^{i\pi/2-\pi t} - e^{-i\pi/2+\pi t}}{2i} = i \frac{e^{-\pi t} + ie^{\pi t}}{2i} = \text{ch } \pi t \geq 1.$$

$$|\sin(\pi(t \pm iN))| = \left| \frac{e^{\pi i t} e^{\pm \pi N} - e^{-\pi i t} e^{\mp \pi N}}{2i} \right| \leq \left| \frac{e^{\pm \pi N} - e^{\mp \pi N}}{2} \right| = |\text{sh } \pi N|$$

$$|(\pi(2N+1/2+it))^2 + a^2| \leq |(\pi(2N+1/2+it))^2| \leq 4\pi^2 N^2.$$

$$|(\pi(iN+t))^2 + a^2| \leq |(\pi(N+1/2+t))^2| \leq \pi^2 N^2.$$

$$\text{Donc } \left| \int \frac{dz}{(z^2+a^2) \sin \pi z} \right| \leq \frac{1}{2\pi^2 N^2} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ch}^{-1} dt + \frac{8N+2}{2\pi^2 N^2 \text{sh } N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

$$\text{Res}_k \frac{dz}{(z^2+a^2) \sin \pi a} = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2},$$

$$\text{Res}_{ia} \frac{dz}{(z^2+a^2) \sin \pi a} = \frac{1}{2ia \sin \pi a} = \frac{-1}{2a \text{sh } \pi a} = \text{Res}_{-ia} \frac{dz}{(z^2+a^2) \sin \pi a}.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} - \frac{1}{a \text{sh } \pi a} = 0 \text{ et finalement}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} = \boxed{\frac{1}{2a^2} + \frac{\pi}{2a \text{sh } \pi a}}.$$