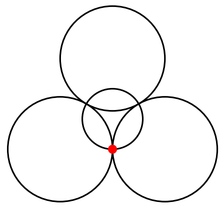
Année 2024-2025

Mathématiques L3 (S6) – Géométrie.

Contrôle continu.
Parcours magistère.
25 avril 2025
Durée 2 heures.
Utilisation des documents autorisé, mais pas encouragée.

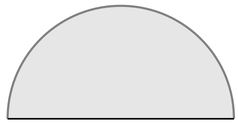
Exercice 1.

Trois cercles sont tangent entre eux et le quatrième passe par les trois points de tangence. Tracer l'image de cette configuration par une homographie de la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1$ qui envoie un de points de tangence à l'infini.



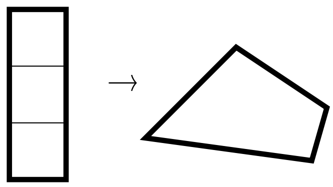
Exercice 2.

Tracer l'ensemble de points duals aux droites qui intersectent un demi-disque en exactement un point.



Exercice 3.

Un quadrilatère est divisé en trois carrés égaux. Construire les images de ces carrées par une transformation projective à partir de l'image du rectangle.



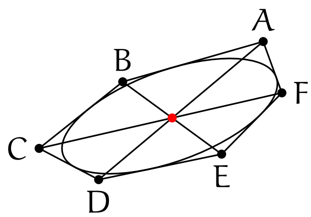
Exercice 4.

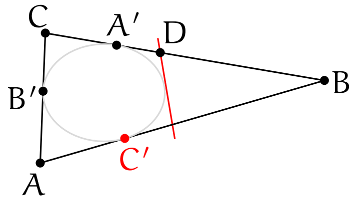
Le théorème de Brianchon clame que si l'hexagone ABCDEF est circonscrit à une conique alors ces diagonales AD, BE et CF sont concourantes.

a. Formuler la conséquence du théorème de Brianchon dans le cas où les triplets de points $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ ainsi que $\mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{A}$ deviennent colinéaires.

b. Soit ABC un triangle et $\mathsf{B}' \in [\mathsf{CA}]$, $\mathsf{A}' \in [\mathsf{BC}]$ deux points sur ces côtés. Il existe une unique conique q inscrit dans ABC et tangente à BC et AC en A' et B', respectivement. Construire la troisième point de tangence C'.

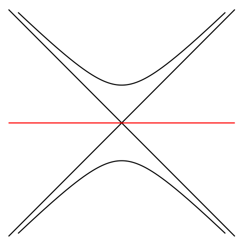
c. Soit $\mathsf{D} \in [\mathsf{BC}]$ un point. Construire la tangente à q passant par D.





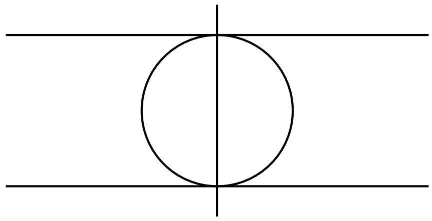
Exercice 5.

Trouver l'image d'une hyperbole, deux ces asymptotes et la droite à l'infini par une transformation du plan projective réelle $\mathbb{R}P^2$ qui envoie l'axe de symétrie (disjointe de l'hyperbole) à l'infini.

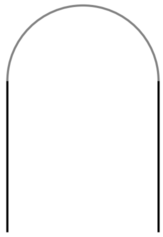


Correction :

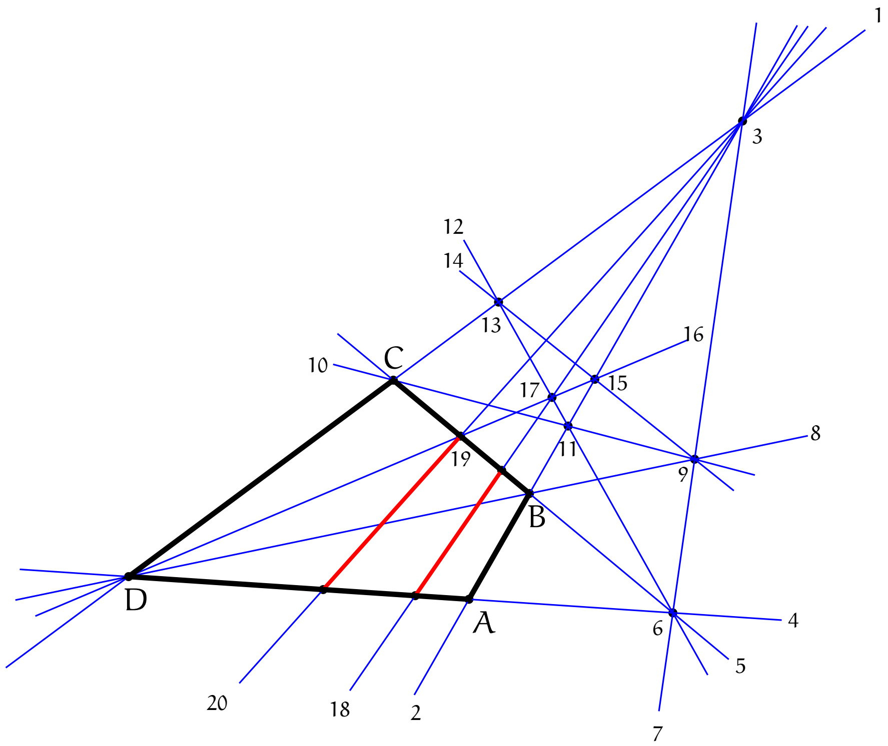
1.



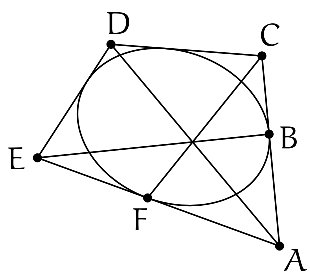
2.



3.

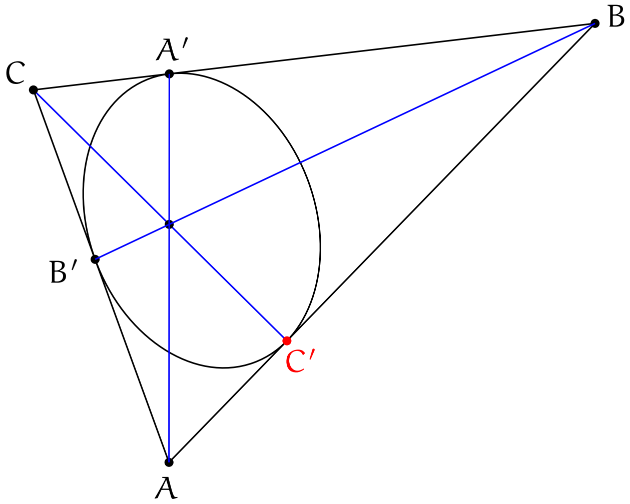


4a.

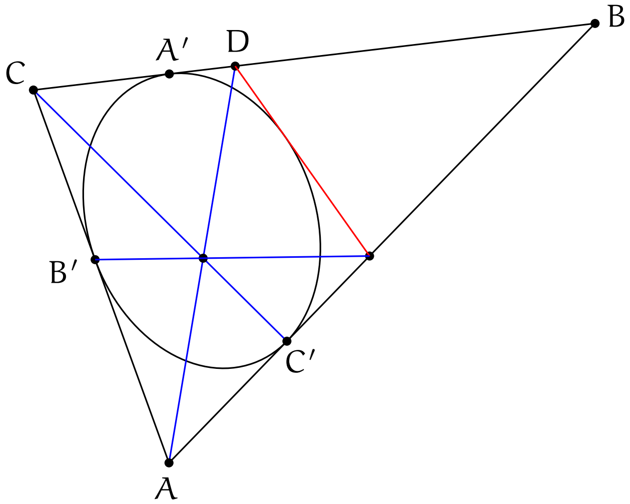


Soit un quadrilatère ACDE est circonscrit à une conique et B est F sont les points de tangence des côtés AC et AE, respectivement. Alors les droites AD, BE et CF sont concourantes.

4b.



4c.



5.