Année 2024-2025

L3 (S6) – Equations différentielles ordinaires. Parcour MA et MS

Contrôle continu.

26 février 2025

Durée 1 heure. Utilisation de documents interdit.

Exercice 1.

a. Résoudre l'équation
$$x^2y' + xy + 1 = 0$$
supposant que $x > 0$.

b. Indiquer la solution satisfaisant la condition initiale $y(1) = 0$.

Indication : Utiliser la variation de la constante.

Exercice 2.

Résoudre l'équation
$$2x^2yy' + y^2 = 2$$
supposant que $x > 0$. *Indication :* Utiliser la séparation des variables.

Exercice 3.

a. Trouver l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ dont les solutions sont les courbes de niveau de la fonction $F(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

b. Tracer les courbes de niveau de la fonction F.

Corrections :

1a. L'équation homogène est $x^2y' + xy = 0 \Leftrightarrow y'/y = -1/x \Leftrightarrow y = C/x$. Substitution $y = C/x$ donne $x^2C'/x - x^2C/x^2 + xC/x + 1 = 0 \Leftrightarrow C' = -1/x \Leftrightarrow C = -\ln x + D$ donc la solution est $y = \dfrac{-\ln x + D}{x}$.
1b. $y(1) = D$ donc $D = 0$ donc $y = -\frac{\ln x}{x}$
2. $2x^2yy' + y^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2yy' = 1 - y^2 \Leftrightarrow \frac{2yy'}{1-y^2} = x^{-2} \Leftrightarrow \frac{2ydy}{1-y^2} = x^{-2}dx \Leftrightarrow \int \frac{2ydy}{1-y^2} = \int x^{-2}dx \Leftrightarrow \int \frac{dy^2}{1-y^2} = \int x^{-2}dx \Leftrightarrow -\ln(1-y^2) = -x^{-1} + C \Leftrightarrow (1-y^2) = De^{1/x} \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - De^{1/x}}$.

3a. $dF = 0 \Leftrightarrow 2xdx + xdy + ydx - 2ydy = 0 \Leftrightarrow (2x+y)dx = (2y-x)dy \Leftrightarrow -\frac{2x+y}{2y-x} = \frac{dy}{dx} = y'$
3b.