Université de Strasbourg
L3 Mathématiques Appliquées 2025-2026
Équations Différentielles

Contrôle continu 1 – 11 février 2026

Durée : 1h. Aucun matériel électronique n'est autorisé.
Explicitez vos raisonnements, même s'ils n'ont pas abouti.
Bon courage !

Exercice 1 (Loi de Torricelli) Supposons qu'on dispose d'un réservoir d'eau cylindrique, percé d'un trou en bas. La loi de Torricelli décrit l'évolution de la hauteur d'eau h dans le réservoir en fonction du temps :

$$(T) \qquad \frac{dh(t)}{dt} = -a\sqrt{h(t)},$$

où a est une constante positive proportionnel au rapport de la sections du trou et celle du réservoir.

a. Cette équation différentielle est-elle autonome ?

b. Résoudre (T).

c. Tracer les graphes des solutions.

d. Si $h(0) = h_0$, au bout de combien de temps le réservoir est-il vide ? Si on met deux fois plus d'eau, comment est-ce que le temps d'écoulement change ?

e. Montrer qu'il y a deux solutions h_1 et h_2 de (T) qui prennent la valeur zéro en même temps. Est-ce que ça contredit le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

Exercice 2
Soit

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)/2y$$

une fonction défini pour $y > 0$.

a. Tracer les courbes de niveau de la fonction F.

b. Trouver l'équation différentielle

$$y' = f(x,y)$$

dont les solutions sont les courbes de niveau de la fonction F.

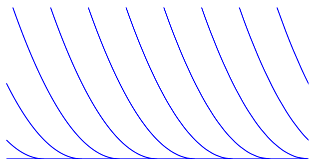
c. Expliciter la solution de l'équation $y' = f(x,y)$ telle que $y(0) = 1$ est marquer son graphe sur le dessin.

Correction :

1a : $\boxed{Oui}$ car la partie droite ne dépend pas explicitement de t.

1b : si $h \neq 0$ on a $dh/\sqrt{h} = -adt \Rightarrow \int dh/\sqrt{h} = -\int adt \Rightarrow 2\sqrt{h} = -a(t - t_0) \Rightarrow h = a^2(t - t_0)^2/4$ et $t < t_0$. $h = 0$ est une autre solution, donc l'ensemble de solutions sur $\mathbb{R}$ est

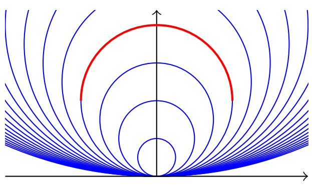
$$\boxed{h(t) = \begin{cases} a^2(t - t_0)^2/4 \text{ si } t < t_0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

1c : 

1d : $h_0 = a^2 t_0^2/4$ donc $\boxed{t_0 = 2\sqrt{h_0}/a}$. Le temps d'ecoulement est multiplié par $\sqrt{2}$.

1e : $h_1 = 0$ et toute autre solution coïncident pour t suffisamment grand. La fonction $\sqrt{h}$ n'est pas lipschitzienne lorsque $h = 0$ car $\lim_{h\to 0} \sqrt{h}/h = \infty$, donc l'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz n'est pas satisfait.

2a : $\dfrac{x^2 + y^2}{2y} = \lambda \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \lambda y \Leftrightarrow x^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$ donc la courbe de niveau est un cercle centré en $(0, \lambda)$ et de rayon λ.



2b : $dF = \dfrac{1}{2}\dfrac{yd(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)d(y)}{y} = \dfrac{2xydx + 2y^2dy - x^2dy - y^2dy}{2y^2} = \dfrac{2xydx - (x^2 - y^2)dy}{2y^2}$

donc $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}}$.

2c : La solution est un fragment du cercle $x^2 + y^2 = 2cy$. $c = 1$ car $1^2 + 1^2 = 2 \cdot 1 \cdot 1$. Donc $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ et elle est défini pour $-1 \leqslant x \leqslant 1$.