Année 2024-2025

L3 (S6) – Analyse complexe.

Contrôle continu. Parcours magistère.

07 mars 2025

Durée 1 heure. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1.

Calculer l'intégrale

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^{1/z}}{1-a^2z^2} dz.$$

où $C(0,1)$ et le cercle $C(0,r) = \{z|\ |z| = 2\}$ de rayon 2 parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 2.

Calculer l'intégrale

$$\int_L dz d\bar{z},$$

où $L = \{z|\ |z^2 - 1| < 1\}$.

Exercice 3.

Exprimer le champ vectoriel

$$\bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

en coordonnées polaires.

Exercice 4.

Soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes. Soient k et l le nombre de racines de $P(z)$ et $Q(z)$ respectivement de valeur absolue plus petit que 1 (comptés avec multiplicités). Calculer l'intégrale

$$\int_{C(0,1)} \frac{df}{f},$$

où $C(0,1)$ et le cercle unité $C(0,1) = \{z|\ |z| = 1\}$ parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 5.

Trouver l'image du disque unité $D(0,1) = \{z|\ |z| < 1\}$ par l'homographie

$$z \mapsto i\frac{1-z}{1+z}.$$

Correction :

1.

$$\int_{C(0,2)} \frac{e^{1/z}}{1-a^2z^2}dz = \int_{C(0,1/2)} \frac{e^w}{1-a^2w^{-2}}\frac{dw}{w^2} = \int_{C(0,1/2)} \frac{e^w}{w^2-a^2}dw = \frac{1}{2a}\int_{C(0,1/2)} e^w\left(\frac{1}{w-a}-\frac{1}{w+a}\right)dw =$$

$$= 2\pi i\frac{e^a-e^{-a}}{2a} = \begin{cases} \frac{2\pi i}{a}\operatorname{ch} a \;\; si\ |a|<1/2, \\ 0 \;\; si\ |a|>1/2, \\ \text{diverge si } |a|=1/2. \end{cases}$$

2.

$$(z^2-1)(\bar{z}^2-1)=1 \quad \Leftrightarrow \quad (r^2e^{i\phi}-1)(r^2e^{-i\phi}-1)=1 \quad \Leftrightarrow \quad r^4-2r^2\cos 2\phi+1=1$$
$$\Leftrightarrow \quad r^2=2\cos 2\phi.$$

$$\int_L dz d\bar{z} = \int_L d(re^{i\phi})d(re^{-i\phi}) = \int_L (dr+ird\phi)d(dr-ird\phi) = -2i\int_L drd\phi =$$
$$= -i\int_{\partial L} r^2 d\phi = -2i\int_{\cos\phi\geqslant 0}\cos 2\phi d\phi = -i\sin 2\phi|_{-\pi/4}^{\pi/4} - i\sin 2\phi|_{3\pi/4}^{5\pi/4} = -4i.$$

3.

$$\bar{z}\frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \bar{z}\left(\frac{\partial r}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \bar{z}\left(\frac{\partial\sqrt{z\bar{z}}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2i}\frac{\partial\ln z/\bar{z}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{z\bar{z}}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{2i}\frac{\partial}{\partial\phi} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}+i\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

4. Soit $P(z)=\prod_i(x-\lambda_i)^{m_i}$ et $Q(z)=\prod_j(x-\lambda_j)^{n_i}$. Alors

$$\int_{C(0,1)}\frac{dP(z)/Q(z)}{P(z)/Q(z)} = \sum_i m_i\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z-\lambda_i} - \sum_j n_i\int_{C(0,1)}\frac{dz}{z-\mu_j} = 2\pi i(k-l)$$

5.

$\mathfrak{Im}\, i\frac{1-e^{i\phi}}{1+e^{i\phi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{i\phi}}{1+e^{i\phi}}+\frac{1-e^{-i\phi}}{1+e^{-i\phi}}\right)=0$. (Un autre argument : $1\mapsto 0$, $i\mapsto 1$, $-1\mapsto\infty$). Alors l'image du cercle unité est la droite réelle et l'image du disque est un des deux demi-plans. Mais, car $0\mapsto i$ c'est le demi-plan supérieur.