

L3 (S6) – Analyse complexe.

Contrôle continu. Parcours magistère.

13 mars 2025

*Durée 1 heure. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.***Exercice 1.**

Calculer l'intégrale

$$\int_{C(o,r)} \frac{e^{1/z}}{1+z^2} dz.$$

où $C(o, r)$ est le cercle $C(o, r) = \{z \mid |z| = r\}$ de rayon r parcouru dans le sens trigonométrique.**Exercice 2.**

Calculer l'intégrale

$$\int_{\Omega} dz d\bar{z},$$

où Ω est l'intérieur de la cardioïde donnée en coordonnées polaires par l'équation $r = 1 + \cos \theta$.**Exercice 3.**

a. Trouver toutes les champs vectoriels entières

$$f(z) \frac{\partial}{\partial z}$$

qui sont holomorphe à l'infini, i.e., reste holomorphe après le changement de variable $w = z^{-1}$.b. La même question pour les formes entières $f(z)dz$.**Exercice 4.**

Soit

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

et soit $\sum_k a_k z^k$ est sa série de Taylor.

a. Trouver la rayon de convergence.

b. Trouver explicitement les coefficients a_k pour k impairs.

Correction :

1.

$$\int_{C(0,r)} \frac{e^{1/z}}{1+z^2} dz = \int_{C(0,1/r)} \frac{e^w}{1+w^{-2}} \frac{dw}{w^2} = \int_{C(0,1/r)} \frac{e^w}{w^2+1} dw = \frac{1}{2i} \int_{C(0,1/r)} e^w \left(\frac{1}{w-i} - \frac{1}{w+i} \right) dw =$$

$$= \begin{cases} 2\pi i \frac{e^i - e^{-i}}{2i} = \frac{2\pi i}{a} \sin 1 & \text{si } r < 1, \\ 0 & \text{si } r > 1, \\ \text{diverge} & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

2.

$$\int_{\Omega} dz d\bar{z} = \int_{\Omega} d(re^{i\theta}) d(re^{-i\theta}) = \int_{\Omega} (dr + ir d\theta) d(dr - ir d\theta) = -2i \int_{\Omega} r dr d\theta =$$

$$= -i \int_{\partial\Omega} r^2 d\theta = -i \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = -i \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta) d\theta = -3\pi i$$

3a.

$$\sum_k a_k z^k \frac{\partial}{\partial z} = \sum_k a_k w^{-k} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial}{\partial w} = - \sum_k a_k w^k w^2 \frac{\partial}{\partial w} = \sum_k a_k w^{-k+2} \frac{\partial}{\partial w}.$$

donc le champ vectoriel entière non-nulle holomorphe à l'infini il s'écrit comme

$$(a + bz + cz^2) \frac{\partial}{\partial z}.$$

3b.

$$\sum_k a_k z^k dz = \sum_k a_k w^{-k} dw^{-1} = - \sum_k a_k w^k w^{-2} dw = - \sum_k a_k w^{-k-2} dw.$$

donc la forme entière non-nulle n'est jamais holomorphe à l'infini.

4a. La fonction $f(z)$ est définie et holomorphe partout à l'exception de points $2\pi i k$, ou $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Les singularités le plus proches de 0 sont $\pm 2\pi i$. Donc la rayon de convergence est 2π .

4b.

$$\sum_k 2a_{2k+1} z^{2k+1} = \frac{z}{e^z - 1} - \frac{-z}{e^{-z} - 1} = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{ze^z}{1 - e^z} = \frac{z(1 - e^z)}{e^z - 1} = -z$$

donc $a_1 = -1/2$ et $a_{2k+1} = 0$ pour $k > 0$.