Année 2024-2025

L3 (S6) – Equations différentielles ordinaires. Parcour MA et MS

Contrôle continu.

19 mars 2025

Durée 1 heure. Utilisation de documents interdit.

Exercice 1.

a. Calculer l'exponentielle $\exp(At)$ où A est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b. Trouver la solution du système d'équations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -4x - 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y. \end{cases}$$

avec les valeurs initiales $x(0) = y(0) = 2$.

c. Expliciter les valeurs initiales pour lesquelles la solution tend vers zéro lorsque t tend vers plus infini.

Exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} - 4x = 10e^{-4t} + 12te^{-t}.$$

Exercice 3.

Former une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a(t)\frac{dx}{dt} + b(t)x = 0,$$

dont on connaît un système fondamental de solutions

$$x_1 = e^{-t^2/2},$$
$$x_2 = e^t.$$

Corrections :

1a. Le polynôme caractéristique de la matrice tA est $\chi_{At}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -4t-\lambda & -5t \\ t & 2t-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda t + 3t^2 =$ $= (\lambda - t)(\lambda + 3t)$. Donc on cherche l'exponentielle de la forme $\exp(tA) = \alpha At + \beta$, où α et β satisfont l'équation $\begin{cases} e^t = t\alpha + \beta \\ e^{-3t} = -3t\alpha + \beta \end{cases}$. Donc $\alpha = (e^t - e^{-3t})/4t$ et $\beta = (3e^t + e^{-3t})/4$. Alors
$\exp(At) = \dfrac{e^t - e^{-3t}}{4} \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \dfrac{3e^t + e^{-3t}}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{e^t}{4} \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \dfrac{e^{-3t}}{4} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1b. $\exp tA \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \dfrac{e^t - e^{-3t}}{4} \begin{pmatrix} -18 \\ 6 \end{pmatrix} + \dfrac{3e^t + e^{-3t}}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3e^t + 5e^{-3t} \\ 3e^t - e^{-3t} \end{pmatrix}$.

1c. Afin que la solution tend vers zéro il faut que la valeurs initiale soit annulé par la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, donc $x(0) + 5y(0) = 0$.

2. L'équation caractéristique est $0 = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1)$. Donc la solution générale de l'équation homogène est $Ae^{-4t} + Be^t$. Cherchons une solution particulière de l'équation $x'' + 3x' - 4 = e^{-4t}$ de la forme $x = ate^{-4t}$. Donc $x' = (1-4t)ae^{-4t}$, $x'' = (16t - 8)ae^{-4t}$. Après la substitution on obtient $16ae^{-4t} - 12ae^{-4t} - 4ae^{-4t} = 10e^{-4t}$, donc $a = -2$. De même on cherche la solution particulière de l'équation $x'' + 3x' - 4 = te^{-t}$ de la forme $(at + b)e^{-t}$. Donc $x' = (a - b - at)e^{-t}$ et $x'' = (b - 2a + at)e^{-t}$. Après la substitution on obtient $-6at - 6b + a = 12t$. D'où $a = -2$ et $b = -1/3$. Donc $x(t) = Ae^{-4t} + Be^t - 2te^{-4t} - (2t + \frac{1}{3})e^{-t}$.

3. L'équation est $\det \begin{pmatrix} x & x_1 & x_2 \\ x' & x_1' & x_2' \\ x'' & x_1'' & x_2'' \end{pmatrix} = 0$. Substituant les fonctions x_1 et x_2 on obtient
$0 = \det \begin{pmatrix} x & e^{-t^2/2} & e^t \\ x' & -te^{-t^2/2} & e^t \\ x'' & (t^2-1)e^{-t^2/2} & e^t \end{pmatrix} = e^{t - t^2/2}\left(x''(1+t) + x'(t^2-2) + x(1-t-t^2)\right)$. Donc l'équation est
$x'' + x'(t^2-2)/(t+1) + x(1-t-t^2)/(t+1) = 0$