Université de Strasbourg
L3 Mathématiques Appliquées 2025-2026
Équations Différentielles

Contrôle continu 18 mars 2026

Durée : 1h. Aucun matériel électronique n'est autorisé.
Explicitez vos raisonnements, même s'ils n'ont pas abouti.
Bon courage !

Exercice 1 Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + x^2 + xy - y = 0$$

pour $x > 0$.

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ une matrice.

a. Calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de A et déterminer ces racines.

b. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ calculer les coefficients a_k et b_k tels que $A^k = \alpha_k A + \beta_k$. Calculer ensuite la matrice A^k.

c. Calculer les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ telles que $\exp(At) = \alpha(t)A + \beta(t)$. Calculer ensuite la matrice $\exp(At)$.

   Indication pour b et c : Tout polynôme (et comme conséquence toute fonction entière, comme l'exponentielle) $S(\lambda)$ peut être écrit comme $S(\lambda) = Q(\lambda)P(\lambda) + R(\lambda)$ où $R(\lambda)$ est le reste de la division euclidienne de $S(\lambda)$ par $P(\lambda)$ et donc $R(\lambda) = a\lambda + b$. Les coefficients a et b peuvent être trouvés à partir des équations $S(\lambda_i) = R(\lambda_i)$ où λ, et λ_2 sont les racines de $P(\lambda)$. Ensuite on peut calculer $S(A) = aA + b$.

d. Résoudre le système différentielle

$$\begin{cases} x' = 2x - y, \\ y' = -2x + 3y, \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$$

e. Trouver des suites $\{x_n\}$ et y_n qui satisfont le système de récurrence

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - y_n, \\ y_{n+1} = -2x_n + 3y_n, \\ x_0 = 1, \ y_0 = 0. \end{cases}$$

Exercice 3 On considère l'équation différentielle

$$x'' + ax' + bx = 0$$

a. Trouver toutes les solution de la forme $x(t) = e^{\lambda t}$, où λ est une nombre complexe.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que toutes les solutions soient bornées.

Correction :

1a : Résoudrons d'abord l'équation sans second membre (pour $x > 0$) :

$xy' + xy - y = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow \ln y = \ln x - x + C \Rightarrow y = Cxe^{-x}$.

Donc on cherche la solution de la forme $y = C(x)x^{-1}e^{x}$. Substituant dans l'équation initiale on obtient $x(C'xe^{x} + Ce^{x} - Cxe^{-x}) + Cx^2e^{x} - Cxe^{x} + x^2 = 0 \Rightarrow C'x^2e^{x} + x^2 = 0 \Rightarrow C'e^{x} + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow C' = e^{-x} \Rightarrow C = -e^{-x} + D \Rightarrow y = -x + Dxe^{-x}$.

2a : $P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda - 1)(\lambda - 4)$.

2b. $A^k = \alpha_k A + \beta_k \Rightarrow \begin{cases} 1^k = 1\alpha_k + \beta_k \\ 4^k = 4\alpha_k + \beta_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_k = (4^k - 1)/3 \\ \beta_k = (4 - 4^k)/3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow A^k = \frac{1}{3}(4^k - 1)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(4 - 4^k)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4^k}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2c. $e^{tA} = \alpha(t)A + \beta(t) \Rightarrow \begin{cases} e^{t} = t\alpha(t) + \beta(t) \\ e^{4t} = 4t\alpha(t) + \beta(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha(t) = (e^{4t} - e^{t})/3 \\ \beta(t) = (4e^{t} - e^{4t})/3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{At} = \frac{1}{3}(e^{4t} - e^{t})\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}(4e^{t} - e^{4t})\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{e^{4t}}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \frac{e^{t}}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2d. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{e^{4t}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{e^{t}}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2d. $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = A^k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4^k}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3a. $(e^{\lambda t})'' + a(e^{\lambda t}) + be^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda t} = 0 \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$.

3b. Le fonctions $e^{\lambda_\pm t}$ sont bornées si $\Re e\lambda\pm = 0$ et donc seulement si $\Re e(\lambda_+ + \lambda_-) = -a = 0$. Si $b = 0$ il y a une solution $x(t) = t$ non-bornée. Si $b < 0$ les solutions $x_\pm(t) = e^{\pm\sqrt{-b}t}$ sont non-bornées. Si $b > 0$ les deux solutions $x_\pm(t) = e^{\pm i\sqrt{b}t}$ et donc toutes les solutions sont bornées.