Année 2024-2025

L3 (S6) – Analyse complexe.

Contrôle continu. Parcours magistère.

04 avril 2025

Durée 1 heure. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1.

Calculer la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{3n+1}$$

et déterminer son rayon de convergence.

Exercice 2.

Trouver l'ordre de la fonction

$$\mathrm{Ord}_0 \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{e^{x^2/3}}{x^2} \right).$$

Exercice 3.

Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions entières qui satisfont, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(e^{-n}) = e^{-n^2}.$$

Exercice 4.

Calculer l'intégrale

$$\int_{C(0,2)} \frac{z^2+5}{z^5 - 3z^4 - z + 3} dz,$$

où $C(0,2)$ est le cercle de rayon 2 centré à 0 et parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 5.

Trouver la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$$

Indication : Utiliser le théorème des résidus pour la forme $\dfrac{dz}{(z^2+a^2)\sin \pi z}$ et le rectangle $|\mathfrak{Re}\, z| \leqslant 2N + 1/2$, $|\mathfrak{Im}\, z| \leqslant N$.

Correction :

1 . $\displaystyle\sum_{3n+1} \frac{z^{3n+1}}{3n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+\zeta^{n-1}+\zeta^{2n-2}}{3}\frac{z^n}{n} =$

$\displaystyle= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \zeta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta z)^n}{n} + \zeta^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta^2 z)^n}{n} =$

$= \boxed{-\ln(1-z) - \zeta^{-1}\ln(1-\zeta z) - \zeta^{-2}\ln(1-\zeta^2 z)}.$

Le rayon de convergence $1/R = \overline{\lim}_{n\to\infty}(3n+1)^{1/(3n+1)} = e^{\ln(3n+1)/(3n+1)} = \boxed{1}$.

2 . $\displaystyle\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{e^{x^2/3}}{x^2} = \frac{x^2 - \sin^2 x \exp(x^2/3)}{x^2\sin^2 x} =$

$\displaystyle= \frac{x^2 - x^2(1 - x^2/6 + x^4/120)^2(1 + x^2/3 + x^4/18) + O(x^8)}{x^2\sin^2 x} =$

$\displaystyle= \frac{x^6(-1/36 + 1/18 + 1/18 - 1/120 - 1/120 - 1/18) + O(x^8)}{x^2\sin^2 x} =$

$\displaystyle= \frac{x^6/90 + O(x^8)}{x^2\sin^2 x}$. Donc $\displaystyle\mathrm{Ord}_0\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{e^{x^2/3}}{x^2}\right) = 6 - \mathrm{Ord}_0(x^2\sin^2 x) = \boxed{2}$

3 . Soit $\mathrm{Ord}_0 f(z) = k$ donc $f(z) = z^k g(z)$. Donc $f(e^{-n}) = e^{-n^2} = e^{-nk}g(e^{-n})$.

D'où $g(0) = \lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{n\to\infty} e^{-n^2+nk} = 0$. Alors $\mathrm{Ord}_0 f(z) > k$. Contradiction.

Donc $\boxed{\text{telle fonction n'existe pas}}$.

4 . $z^5 - 3z^4 - z + 3 = z^4(z-3) - (z-3) = (z^4-1)(z-3)$.

Donc $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{z^2+5}{z^5-3z^4-z+3}dz = \int_{C(0,2)} \frac{z^2+5}{(z^4-1)(z-3)}dz = \int_{C(0,1/2)} \frac{w^{-2}(w^{-2}+5)}{(w^{-4}-1)(w^{-1}-3)}dw =$

$\displaystyle= \int_{C(0,1/2)} \frac{w(1+5w^2)}{(1-w^4)(1-3w)}dw = 2\pi i \operatorname*{Res}_{1/3} \frac{w(1+5w^2)}{(1-w^4)(1-3w)}dw = \boxed{-\frac{7\pi i}{20}}.$

5 . $\displaystyle\sin(\pi(2N+1/2+it)) = \frac{e^{i\pi/2-\pi t} - e^{-i\pi/2+\pi t}}{2i} = i\frac{e^{-\pi t} + ie^{\pi t}}{2i} = \mathrm{ch}\,\pi t \geqslant 1.$

$\displaystyle|\sin(\pi(t \pm iN))| = \left|\frac{e^{\pi i t}e^{\pm\pi N} - e^{-\pi i t}e^{\mp\pi N}}{2i}\right| \leqslant \left|\frac{e^{\pm\pi N} - e^{\mp\pi N}}{2}\right| = |\mathrm{sh}\,\pi N|$

$|(\pi(2N+1/2+it))^2 + a^2| \leqslant |(\pi(2N+1/2+it))^2| \leqslant 4\pi^2N^2$.

$|(\pi(iN+t))^2 + a^2| \leqslant |(\pi(N+1/2+t))^2| \leqslant \pi^2N^2$.

Donc $\displaystyle\left|\int \frac{dz}{(z^2+a^2)\sin\pi z}\right| \leq \frac{1}{2\pi^2N^2}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{ch}^{-1}\,dt + \frac{8N+2}{2\pi^2N^2\,\mathrm{sh}\,N} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0,$

$\displaystyle\operatorname*{Res}_{k} \frac{dz}{(z^2+a^2)\sin\pi a} = \frac{(-1)^k}{k^2+a^2},$

$\displaystyle\operatorname*{Res}_{ia} \frac{dz}{(z^2+a^2)\sin\pi a} = \frac{1}{2ia\sin\pi ia} = \frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\pi a} = \operatorname*{Res}_{-ia} \frac{dz}{(z^2+a^2)\sin\pi a}.$

Donc $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} + \frac{2}{a\,\mathrm{sh}\,\pi a} = 0$ et finalement

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+a^2} + \frac{1}{2a^2} = \boxed{\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{a\,\mathrm{sh}\,\pi a}}.$$