Année 2025-2026

L3 (S6) – Analyse complexe.

Contrôle continu. Parcours magistère.

09 avril 2026

Durée 1 heure. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1.

Calculer la somme de la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k(k+1)}$$

et déterminer sa rayon de convergence.

Exercice 2.

Trouver l'ordre de la fonction

$$\operatorname*{Ord}_0 \left(\frac{\operatorname{ch} z}{\sin z} - \frac{\cos z}{\operatorname{sh} z} \right).$$

Exercice 3.

Calculer l'intégrale

$$I(r) = \int_{C(1,r)} \frac{z\,dz}{z^3+1},$$

où $C(1,r)$ est le cercle de rayon p centré en 0 et parcouru dans le sens trigonométrique.

Exercice 4.

Trouver le résidu

$$\operatorname*{Res}_0 \frac{e^{a/z}}{1+z^2} dz$$

Exercice 5.

Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions entières qui satisfont l'équation fonctionnelle

$$f(qz) = zf(z),$$

où $|q| < 1$.

Correction :

1.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{k}\left(\frac{z^k}{k}-\frac{z^k}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{k}\frac{z^k}{k}-z^{-1}\sum_{k=1}^{k}\frac{z^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=1}^{k}\frac{z^k}{k}-z^{-1}\left(-z+\sum_{k=1}^{k}\frac{z^k}{k}\right)=$$
$$=(z^{-1}-1)\ln(1-z)+1$$

2.

$$\mathrm{Ord}_0\left(\frac{\operatorname{ch} z}{\sin z}-\frac{\cos z}{\operatorname{sh} z}\right)=\mathrm{Ord}_0(\operatorname{ch} z\operatorname{sh} z-\cos z\sin z)-\mathrm{Ord}_0(\operatorname{sh} z\sin z)$$
$$\operatorname{ch} z\operatorname{sh} z=(1+z^2/2+O(z^4))(z+z^3/6+O(z^5))=z+2z^3/3+O(z^5)$$
$$\cos z\sin z=(1-z^2/2+O(z^4))(z-z^3/6+O(z^5))=z-2z^3/3+O(z^5)$$
$$\operatorname{sh} z\sin z=(z+z^3/6+O(z^5))(z-z^3/6+O(z^5))=z^2+O(z^6)$$

donc

$$\mathrm{Ord}_0(\operatorname{ch} z\operatorname{sh} z-\cos z\sin z)=\underset{0}{\mathrm{Ord}}(4z^3/3+O(z^5))=3$$
$$\mathrm{Ord}_0(\operatorname{sh} z\sin z)=\underset{0}{\mathrm{Ord}}(z^2+O(z^6))=2$$
$$\mathrm{Ord}_0\left(\frac{\operatorname{ch} z}{\sin z}-\frac{\cos z}{\operatorname{sh} z}\right)=3-2=1.$$

3.
Soit $\alpha=\dfrac{zdz}{z^3+1}$ et $I(r)=\int_{C(1,r)}\alpha$.
$\dfrac{z}{z^3+1}=\dfrac{z}{(z+1)(z+\omega)(z+\omega^2)}=\dfrac{-1/3}{z+1}+\dfrac{-\omega^2/3}{z-\omega}+\dfrac{-\omega/3}{z-\omega^2}$
$|\omega+1|^2=(-\omega+1)(-\omega^2+1)=2-\omega-\omega^2=1$ alors si $r<1$ il n'y a pas de pôles à l'intérieur du cercle, si $1<r<2$ il y a deux pôles $-\omega$ et ω^2 et si $r>2$ il y a trois pôles 1, $-\omega$ et ω^2.
$\dfrac{zdz}{z^3+1}=\dfrac{w^{-1}dw^{-1}}{w^{-3}+1}=-\dfrac{dw}{1+w^3}$ et donc $\dfrac{zdz}{z^3+1}$ n'a pas de pole à l'infini.
Donc $I(r)=0$ si $r<1$ ou $r>2$ et $I(r)=2\pi i\underset{-\omega}{\mathrm{Res}}\,\alpha+2\pi i\underset{-\omega^2}{\mathrm{Res}}\,\alpha=2\pi i(-\omega^2/3-\omega/3)=\frac{2\pi i}{3}$.

4.

$$\underset{0}{\mathrm{Res}}\frac{e^{a/z}}{1+z^2}dz=\underset{\infty}{\mathrm{Res}}\frac{e^{aw}}{1+w^{-2}}d(1/w)=-\underset{\infty}{\mathrm{Res}}\frac{e^{aw}}{1+w^2}dw=\underset{i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{aw}}{1+w^2}dw+\underset{-i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{aw}}{1+w^2}dw=$$
$$=\underset{i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{aw}}{(w+i)(w-i)}dw+\underset{-i}{\mathrm{Res}}\frac{e^{aw}}{(w+i)(w-i)}dw=\frac{e^{ia}}{2i}+\frac{e^{-ia}}{-2i}=\sin a$$

5. Soit $\underset{0}{\mathrm{Ord}}\,f=k$ donc $f(z)=az^k+O(z^{k+1})\Rightarrow f(qz)=aq^kz^k=O(z^{k+1})\Rightarrow\underset{0}{\mathrm{Ord}}\,f(qz)=k$. De l'autre côté $\underset{0}{\mathrm{Ord}}\,zf(z)=k+1$. Contradiction. Donc $f=0$.