Année 2024-2025

L3 (S6) – Equations différentielles ordinaires. Parcour magistère.

**Contrôle continu.**

7 mai 2025

*Durée 2 heurs.*

*Utilisation de documents autorisée mais pas encouragée.*

## Exercice 1.

Résoudre l'équation

$$(1 - x^2)y' - 2xy^2 = xy$$

et tracer les graphes de ces solutions.

## Exercice 2.

Considérer le système.

$$\begin{cases} x' = -x^3 - y, \\ y' = -y - x. \end{cases}$$

a. Existe-t-il un potentiel $U(x, y)$ tel que ce système s'écrit comme $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\nabla U = -\begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \end{pmatrix}$ ? Si oui, trouver le.

b. Trouver les points d'équilibre et discuter leur stabilité.

## Exercice 3.

Une famille de courbes dans le plan est donnée par l'équation

$$\lambda(x^2 - 1) + \mu(y^2 - 1) = 0$$

a. Tracer cette famille de courbes.

b. Former une équation différentielle dont les solutions sont ces courbes.

## Exercice 4.

Résoudre l'équation d'Euler

$$y'' - \frac{3}{t}y' + \frac{4}{t^2}y = t,$$

où $t > 0$.

## Exercice 5.

Pour l'équation différentielle

$$y'' + \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^3 y} = 0$$

a. Tracer le portrait de phases.

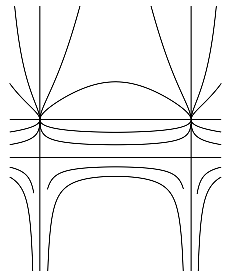
b. Résoudre l'équation.

c. Pour les solutions périodiques trouver les périodes.

*Corrections :*

**1.**

$$(1-x^2)y'-2xy^2=xy \Leftrightarrow (1-x^2)dy = x(y-2y^2)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y(1-2y)} = \frac{xdx}{1-x^2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{2y-1}-\frac{1}{y}\right)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ln\frac{2y-1}{y} = \ln(1-x^2)^{1/2}+C \Leftrightarrow 2-y^{-1} = C'\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2-C'\sqrt{1-x^2}}$$



**2a.** Oui car $\dfrac{\partial x^3+y}{\partial y} - \dfrac{\partial x+y}{\partial x} = 0$. $U(x,y) = \int(xy+y^2/2)dy + f(x) = \int(x^3+y)dx + g(y)$.
D'où $U(x,y) = \dfrac{x^4}{4} + xy + \dfrac{y^2}{2} + C$.

**2b.** Les points stables satisfont le système

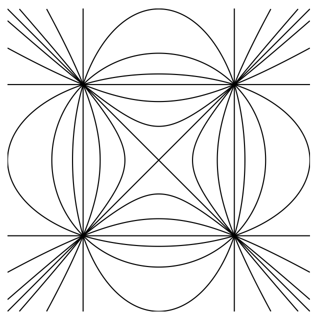
$$\begin{cases} x^3+y=0. \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-x=0. \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)\in\{(-1,1),(0,0),(1,-1)\}$$

La matrice de Hesse $H(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ donc $H(1,-1) = H(-1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} > 0$ (lar le critère de Sylvester), donc $(1,-1)$ et $(-1,1)$ sont stable. $H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Cette forme quadratique prend valeurs négatives (par exemple sur le vecteur $(1,-1)$). Donc le point $(0,0)$ est instable.

**3.**

$$\lambda(x^2-1)+\mu(y^2-1)=0 \Rightarrow \frac{\lambda}{\mu} = \frac{y^2-1}{x^2-1} \Rightarrow d\left(\frac{y^2-1}{x^2-1}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-1)2ydy = (y^2-1)2xdx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-y^{-1}}{x-x^{-1}}.$$

Les trajectoires sont les coniques passant par les sommets du carré $(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1)$.



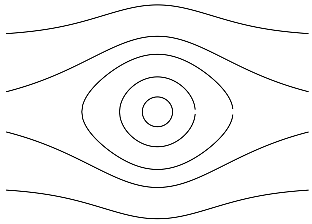
**4.** Multipliant l'équation par $t^2$ on obtient l'équation d'Euler :

$$t^2y''-3ty'+4y=t^3$$

Le polynôme caractéristique est $\alpha(\alpha-1)-3\alpha+4=0 \Leftrightarrow (\alpha-2)^2=0$. Donc la solution générale de l'équation homogène est $(A+B\ln t)t^2$. On cherche une solution particulière de la forme $y=Ct^3$. En substituant dans l'équation on obtient $(6C-9C+4C)t^3=t^3$. Alors $C=1$ est la solution générale est $y=t^3+At^2+Bt^2\ln t$.

**5a.**

$$y''+\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^3 y} = 0 \Rightarrow y''y' + \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^3 y}y' = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}(y')^2 - \frac{1}{2}\operatorname{ch}^{-2} y\right)' = 0 \Rightarrow y' = \sqrt{E+\operatorname{ch}^{-2} y}$$



**5b.**

$$t=\int\frac{dy}{\sqrt{E+\operatorname{ch}^{-2}y}}=\int\frac{\operatorname{ch}y\,dy}{\sqrt{E\operatorname{ch}^2y+1}}=\int\frac{d\operatorname{sh}y}{\sqrt{E(1+\operatorname{sh}^2y)+1}}=\int\frac{du}{\sqrt{E+1+Eu^2}}$$

Cas $E>0$. Posons $w=\left(\frac{E}{E+1}\right)^{1/2}u=\left(\frac{E}{E+1}\right)^{1/2}\operatorname{sh}y$

$$t=\int\frac{(E+1)^{1/2}E^{-1/2}dw}{\sqrt{E+1+(E+1)w^2}}=E^{-1/2}\int\frac{dw}{\sqrt{1+w^2}}=E^{-1/2}\mathrm{Arsh}w+t_0$$

d'où

$$\operatorname{sh}E^{1/2}(t-t_0)=\frac{E^{1/2}}{(E+1)^{1/2}}\operatorname{sh}y\Rightarrow y=\mathrm{Arsh}\left(\frac{(E+1)^{1/2}}{E^{1/2}}\operatorname{sh}E^{1/2}(t-t_0)\right).$$

Cas $-1<E<0$. Posons $w=\left(\frac{-E}{E+1}\right)^{1/2}u=\left(\frac{-E}{E+1}\right)^{1/2}\operatorname{sh}y$

$$t=\int\frac{(E+1)^{1/2}(-E)^{-1/2}dw}{\sqrt{E+1-(E+1)w^2}}=(-E)^{-1/2}\int\frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}=(-E)^{-1/2}\arcsin w+t_0$$

d'où

$$\sin(-E)^{1/2}(t-t_0)=\frac{(-E)^{1/2}}{(E+1)^{1/2}}\operatorname{sh}y\Rightarrow y=\mathrm{Arsh}\left(\frac{(E+1)^{1/2}}{(-E)^{1/2}}\sin(-E)^{1/2}(t-t_0)\right).$$

**5c.** De l'expression explicite de la solution il est clair que $(-E^{1/2})T=2\pi$ où $T$ est la période. D'où $T=2\pi(-E)^{-1/2}\in]2\pi,\infty[$