

CONTRÔLE CONTINU 3 - 29 AVRIL 2026

*Aucun matériel électronique n'est autorisé.
Si une question vous bloque, n'hésitez pas à passer à la suivante.
Bon courage !*

Exercice 1 (Wronskien)

Partie 1 : Soient $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère l'équation différentielle

$$(*) \quad x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

1. *Question de cours :* On note \mathcal{E} l'ensemble des solutions de $(*)$. Soit $t_0 \in I$. Montrer que l'application

$$x \in \mathcal{E} \mapsto (x(t_0), x'(t_0)) \in \mathbb{R}^2$$

est un isomorphisme et en déduire que \mathcal{E} est un espace vectoriel de dimension 2.

2. On note w le wronskien associé à une base (y_1, y_2) de \mathcal{E} . Rappeler la définition de w , puis montrer que w est solution de l'équation différentielle $w'(t) + p(t)w(t) = 0$.

Partie 2 : On considère l'équation définie, pour $t > 0$, par

$$(**) \quad tx''(t) + (1 - 2t)x'(t) + (t - 1)x(t) = 0$$

- Utiliser la partie 1 pour déterminer une équation différentielle vérifiée par le wronskien w de cette équation, puis la résoudre pour trouver w .
- Déterminer l'unique $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t) = e^{\alpha t}$ est solution de $(**)$.
- On note y_2 une solution de $(**)$ indépendante de y_1 . Utiliser $w(x)$ pour trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par y_2 .
- En déduire l'ensemble des solutions de $(**)$.

Partie 3 : On considère enfin l'équation définie, pour $t > 0$, par

$$(\diamond) \quad tx''(t) + (1 - 2t)x'(t) + (t - 1)x(t) = e^t$$

- Ecrire (\diamond) sous forme d'une équation différentielle matricielle d'ordre 1.
- Donner l'ensemble des solutions de (\diamond) . (Par exemple en utilisant une variation de la constante).

Exercice 2 (Intégrales premières) 1. On considère l'équation différentielle (1) $dy - (1+y^2)dx = 0$.

- Montrer que $F(x, y) = \arctan(y) - x$ est une intégrale première de cette équation.
- Dessiner les courbes intégrales de l'équation.

2. On considère l'équation différentielle (2) $y'(x) - e^{x-y(x)} = 0$.

- Donner la forme différentielle dont les courbes intégrales sont solutions de (2).
- Déterminer une intégrale première de (2) et en déduire les courbes intégrales de l'équation.

Exercice 3 (Equation homogène) On considère l'équation différentielle

$$(\Delta) \quad xy'(x) = xe^{-y(x)/x} + y(x), \quad x > 0$$

1. On note $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Montrer que z est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
2. Déterminer $z(x)$ et en déduire les courbes intégrales de (Δ) .

Exercice 4 (Points d'équilibre) On considère l'équation différentielle

$$(\square) \quad y'(x) = -y(x)^3 + 3y(x)^2 - 2y(x)$$

Déterminer les points d'équilibre de cette équation et leur stabilité.

Solutions :

1.1.1 : Selon le théorème de Cauchy-Lipschitz-Picard-Lindelöf cette application est un isomorphisme qui est évidemment linéaire.

$$1.1.2 : w = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}, w' = \det \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ -py_1' - qy_1 & -py_2' - qy_2 \end{pmatrix} =$$

$$= -p \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} - q \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = -pw$$

$$1.2.1 : w' = -\frac{1-2t}{t}w \Leftrightarrow \ln w' = -t^{-1} + 2 \Leftrightarrow \ln w = -\ln t + 2t + C' \Leftrightarrow w = Ct^{-1}e^{2t}.$$

$$1.2.2 : t\alpha^2 e^{\alpha t} + (1-2t)\alpha e^{\alpha t} + (t-1)e^{\alpha t} = 0 \Leftrightarrow t(\alpha^2 - 2\alpha + 1) + (\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

$$1.2.3 : \det \begin{pmatrix} e^t & y_2 \\ e^t & y_2' \end{pmatrix} = Ct^{-1}e^{2t} \Leftrightarrow -y_2'e^t + y_2e^t - Ct^{-1}e^{2t} = 0 \Leftrightarrow y_2' - y_2 = Ct^{-1}e^t$$

1.2.4 : $y_2' - y_2 = Ct^{-1}e^t$. Car e^t est une solution de l'équation sans second membre, on cherche la solution de la forme $y_2 = D(x)e^t$. Donc

$$y_2' - y_2 = Ct^{-1}e^t \Rightarrow D'e^t + De^t - De^t = Ct^{-1}e^t \Leftrightarrow D'e^t = Ct^{-1}e^t \Leftrightarrow D' = Ct^{-1} \Leftrightarrow D = C \ln t + E \Rightarrow y_2 = (C \ln t + E)e^t.$$

1.3.1 Soit $y = x'$ donc l'équation s'écrit comme le système $\begin{cases} x' = y \\ ty' = (2t-1)y + (1-t)x \end{cases}$ ou dans la forme

$$\text{matricielle } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-t & 2t-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

1.3.2 et 1.3.3 Cherchons la solution de la forme $F(t)e^t$.

$$t(Fe^t)'' + (1-2t)(Fe^t)' + (t-1)Fe^t = e^t \Leftrightarrow t(F'' + 2F' + F)e^t + (1-2t)(F' + F)e^t + (t-1)Fe^t = e^t \Leftrightarrow$$

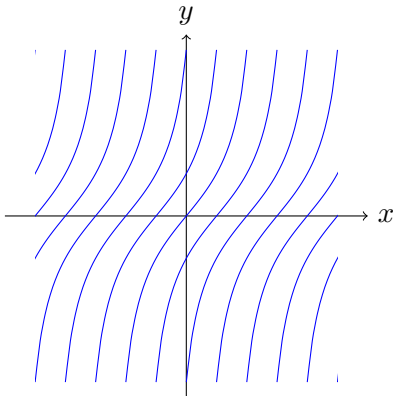
$$\Leftrightarrow tF'' + 2tF' + tF + F' + F - 2tF' - 2tF + tF - F = 1 \Leftrightarrow tF'' + F' = 1 \Leftrightarrow tG' + G = 1 \Leftrightarrow G = 1 + Ct^{-1} \Leftrightarrow$$

$$F = t + C \ln t + Et + G \Leftrightarrow x = (t + C \ln t + E)e^t$$

2.1.a

$$d(\arctan(y) - x) = \frac{dy}{1+y^2} - dx = \frac{dy - (1+y^2)dx}{1+y^2} = 0$$

2.1.b



2.2.ab

$$y' = e^{x-y} \Leftrightarrow y'e^y = e^x \Leftrightarrow (e^y)' = (e^x)' \Leftrightarrow e^y - e^x = C \Leftrightarrow y = \ln(C + e^x)$$

3.1

$$y = zx \Rightarrow x(zx)' = xe^{-z} + zx \Leftrightarrow x^2z' + xz = xe^{-z} + xz \Leftrightarrow z' = x^{-1}e^{-z}$$

3.2

$$z' = x^{-1}e^{-z} \Leftrightarrow (e^z)' = x^{-1} \Leftrightarrow e^z = \ln x + C \Leftrightarrow z = \ln(\ln x + C) \Leftrightarrow y = x \ln(\ln x + C)$$

4.

$$\text{Soit } f(y) = -y^3 + 3y^2 - 2y \quad 0 = f(y) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 1 \\ y = 2 \end{cases} . f'(y) = -3y^2 + 6y - 2, f'(0) = -2 < 0, f'(1) = 1 > 0,$$

$f'(2) = -2 < 0$. Donc les points 0 et 2 sont stables et 1 instable.