Année 2023-2024

Mathématiques L3 (S6) – Géométrie.

**Contrôle continu.**

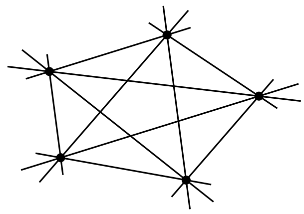
13 mai 2024

*Durée 1 heure 30 min.*

*Utilisation des documents autorisé, mais pas encouragé.*

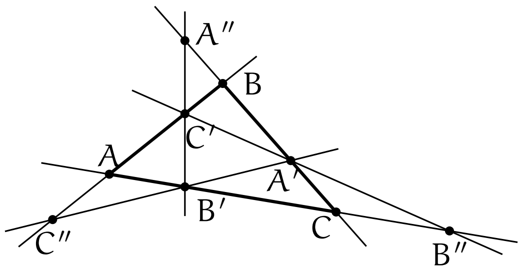
### Exercice 1.

Considérons une configuration de 5 points et 10 droites qui passent par ces points. Tracer la configuration duale.



### Exercice 2.

Soient $A'B'C'$ un triangle inscrit dans un triangle $ABC$. Noterons par $A''$, $B''$ et $C''$ les points d'intersection de côtés de ces triangles.



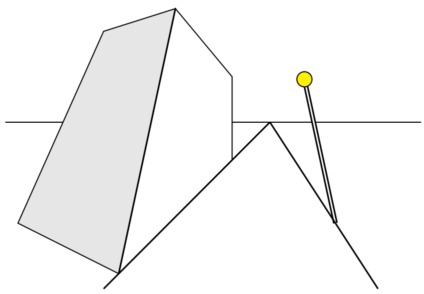

a. Montrer que les birapports $[B, C', A, C'']$, $[C, A', B, A'']$ $[A, B', C, B'']$ coïncident.

b. Existe-t-elle une transformation projective $h$ du plan projectif qui permute cycliquement les points $ABC$ et $A'B'C'$, respectivement ?

*Rappel :* $[X, Y, Z, W] = [Z, W, X, Y] = [Y, X, W, Z] = [W, Z, X, Y] = \frac{(W-X)(Y-Z)}{(W-Z)(Y-X)}$.

### Exercice 3.

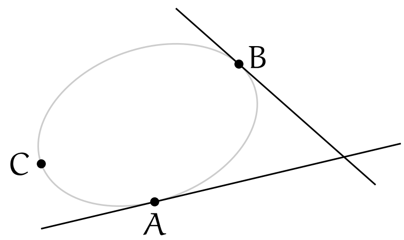
Le dessin (produit à partir d'une vraie photo) représente une route droite vers l'horizon, une maison a gauche et un lampadaire à droite. Tracer un autre lampadaire de même taille juste en face de l'autre côté de la route et calculer le rapport entre la hauteur de la maison celle du lampadaire. Exprimer ce rapport en termes de distances entre les points (donnée ou construits) dans le dessin.



### Exercice 4.

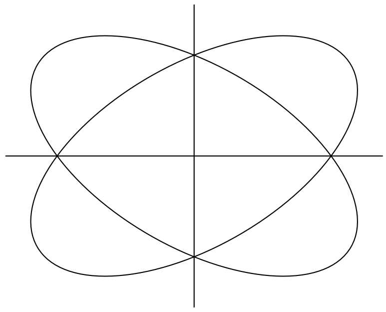
Soient $a$ et $b$ deux droites, $A$ et $B$ deux points sur $a$ et $b$, respectivement et $C$ un point disjoint de $a$ et $b$. Construire un point sur la conique passant par $C$ et tangent à $a$ et $b$ en $A$ et $B$.

*Indication :* Considérer la limite du théorème de Pascal quand l'hexagone se dégénère en quadrilatère.



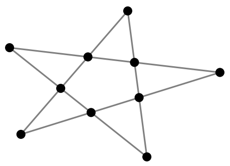

*r.s.v.p*

**Exercice 5.**

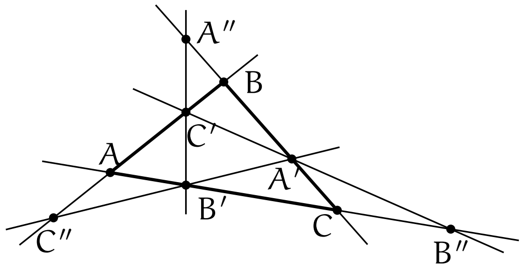


Deux ellipses s'intersectent dans quatre points et deux droites passent par les points d'intersection opposés. Tracer l'image de cette configuration par une transformation du plan projectif réel $\mathbb{R}\mathsf{P}^2$ qui envoie une des deux droites à infini.

**1** :



**2** :

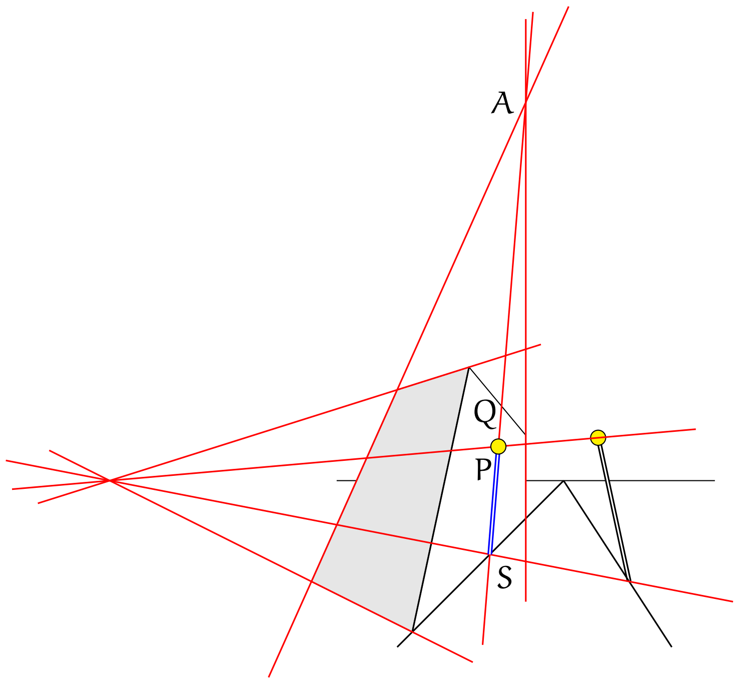



a : Considérons la projection centrale $p$ de la droite $AC$ sur $BC$ à partir le point $C'$. On a $p(A) = B$, $p(B') = A''$, $p(C) = C$ et $p(B'') = A'$. Alors $[A, B', C, B''] = [B, A'', C, A'] = [C, A', B, A'']$. De même $[C, A', B, A''] = [B, C', A, C'']$

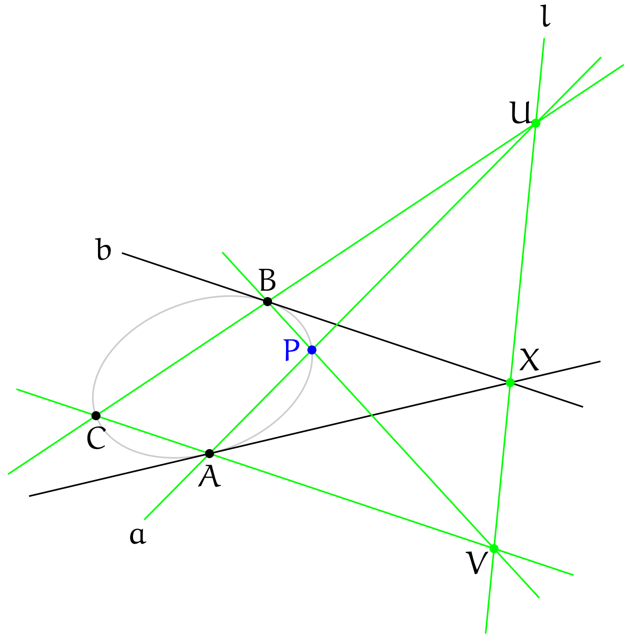
b : Considérons une transformation projective $h$ telle que $h(A'B'C') = C'B'A'$ et $h(A) = C$. Alors $h(AB) = h(AC') = CB' = CA$, alors $h(C'') = h(AB \cap A'B') = CA \cap C'A' = B''$. Donc $h(B) = A$ car $[B, C', A, C''] = [A, B'C, B'']$. De même $h(C) = B$.

**3** :

$$\frac{|S, P|}{|S, Q|} \frac{|A, Q|}{|A, P|}$$



**4** :




1. $X = a \cup b$,
2. Choisir une droite $c$ passant par $X$,
3. $U = CB \cap c$,
4. $V = CA \cap c$,
5. $P = BV \cap AX$.

**5** :