Année 2024-2025

L3 (S6) – Méthodes analytiques dans l'arithmétique.

**Contrôle continu.**

7 mai 2025

*Durée 2 heures. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.*

## Exercice 1.

On considère l'intégrale

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \zeta(s-1)x^s \frac{ds}{s}$$

avec $c \in \mathbb{R}$.

a. Montrer l'existence de $c_0 \in \mathbb{R}$ tel que l'intégrale converge pour tout $c > c_0$.

b. Calculer l'intégrale pour $c > c_0$.

## Exercice 2.

La fonction zêta de Hurwitz est la fonction de deux variables $s, r$ définie par la série

$$\zeta(s,r) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n+r)^s}$$

avec $s$ complexe et $r$ rationnel.

a. On fixe une valeur de $r$. Discuter sur quel domaine la fonction $z \mapsto \zeta(s,r)$ est définie et holomorphe.

b. Pour $s$ de partie réelle $> 1$, calculer $\zeta(s, k/N)$ où $k \in 0, \ldots, N-1$ en termes des fonctions $L(\chi, s) = \sum_{n \geq 1} \chi(n)/n^s$ associées aux caractères de Dirichlet modulo $N$.

c. Calculer le résidu $\operatorname{Res}_1 \zeta(s,q)ds$.

## Exercice 3.

Soit $\chi(n)$ un caractère multiplicatif modulo $N$ et $L(\chi, s)$ sa série de Dirichlet. Montrer que la différence

$$\ln L(\chi, s) - \sum_{p \text{ premier}} \frac{\chi(p)}{p^s}$$

possède un prolongement holomorphe dans un voisinage de $s = 1$.

*Correction :*

1.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\zeta(s-1)x^s\frac{ds}{s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{ds}{s}=\begin{cases}\sum_{n=1}^{\lfloor x\rfloor} n \text{ si } x\notin\mathbb{Z}\\ (\sum_{n=1}^{x} n)-\frac{n}{2} \text{ si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\lfloor x\rfloor(\lfloor x\rfloor+1)/2 \text{ si } x\notin\mathbb{Z}\\ \lfloor x\rfloor^2/2 \text{ si } x\in\mathbb{Z}\end{cases}.$$

2a. $\left|\frac{1}{(n+r)^s}\right|=(n+r)^{-\Re e s}<\left|\frac{1}{(n+\lceil r\rceil)^s}\right|$ si $\Re e s>0$. Dont la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+r)^s}$ converge car la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ converge uniformément sur les compactes lorsque $\Re e s>1$. De même elle diverge si $\Re e s<1$ .

2b. Rappelons que $\sum_\chi\overline{\chi(k)}\chi(n)=\begin{cases}\phi(N) \text{ si } n\equiv k \mod N\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$. Donc

$$\zeta(s,k/N)=\sum_n\frac{1}{(n+k/N)^s}=N^s\sum_n\frac{1}{(Nn+k)^s}=\frac{N^s}{\phi(N)}\sum_n\frac{\sum_\chi\overline{\chi(k)}\chi(n)}{n^s}=\sum_\chi\frac{N^s\overline{\chi(k)}}{\phi(N)}L(s,\chi)$$

2c.

$$\operatorname*{Res}_1\zeta(s,k/N)ds=\sum_\chi\frac{\chi(k)}{\phi(N)}\operatorname*{Res}_1 N^sL(s,\chi)ds=\frac{\chi_0(k)}{\phi(N)}\frac{\phi(N)}{N}\phi(N)=1.$$

3. Le produit d'Euler pour $L(\chi,s)$ s'écrit comme

$$L(\chi,s)=\prod_p\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

$$\ln L(\chi,s)-\sum\frac{\chi(p)}{p^s}=-\sum_p\ln\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)-\frac{\chi(p)}{p^s}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_p\frac{\chi(p)^k}{p^{ks}}$$

Cette série est dominée par

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_n\frac{1}{n^{ks}}<\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_n\frac{1}{n^{ks}}<\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(ks-1)}$$

et converge vers une fonction bornée pour $\Re e\, s>1/2$.