Année 2024-2025

L3 (S6) – Analyse complexe.

Contrôle continu. Parcours magistère.

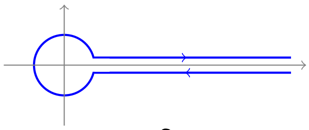
05 mai 2025

Durée 2 heures. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1.

Calculer les intégrales

a.
$$\int_\gamma e^{-x} x^p \frac{dx}{x}$$

où γ est le chemin de Hankel , en termes de la fonction Γ. Pour quelles valeurs de p l'intégrale est-elle convergente ?

b.
$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2} dx,$$

où $a \in \mathbb{R}^\times$.

c.
$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

Exercice 2.

Trouver la série de Taylor de la fonction réciproque de la fonction

$$f(z) = z - z^3.$$

Exercice 3.

Soient f et g deux fonctions à singularités isolées définies sur un domaine Ω et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \Omega$ un chemin fermé disjoint des singularités et des zéros de f et g. On notera $\{f, g\}_\gamma \in \mathbb{C}^\times$ le nombre complexe non-nul donné par l'expression

$$\{f, g\}_\gamma = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\ln f d \ln g - \ln g(\gamma(0)) d \ln f)\right)$$

a. Montrer que $\{f, g\}$ est invariant par déformation du chemin ainsi qu'il ne dépend pas du choix de la branche de logarithme. *Indication :* Calculer la dérivée de l'intégrale par rapport à $\gamma(0)$.

b. Montrer que $\{f, g\}_\gamma\{g, f\}_\gamma = 1$.

c. Montrer que $\{f_1 f_2, g\}_\gamma = \{f_1, g\}_\gamma\{f_2, g\}_\gamma$.

d. Calculer $\{a, b\}_\gamma$, $\{a, z\}_\gamma$, $\{z, z\}_\gamma$ où a, b sont constantes et γ un petit cercle autour de zéro.

e. Soient $f(z) = a_k z^k + a_{k+1} z^{k+1} + \ldots$ et $g(z) = b_l z^l + b_{l+1} z^{l+1} + \ldots$ deux polynomes. Calculer $\{f, g\}_\gamma$ où γ est un petit cercle autour de zéro.

f. Soient $f(z) = a \prod (z - \lambda_i)$ et $g(z) = b \prod (z - \mu_j)$ un polynôme deux polynômes et soit γ deux polynômes de degré k et l respectivement et γ un chemin simple tel que les racines de f sont à l'intérieur de γ et les racines de g — à l'extérieur. Calculer $\{f, g\}_\gamma$.

g.* Montrer que $\{f, g\}_\gamma = 1$ si $f + g = 1$.

Correction :

1a : Si $p > 0$ on a

$$\int_\gamma e^{-x}x^p\frac{dx}{x} = \int_0^\infty e^{-x}x^p\frac{dx}{x} + e^{2\pi ip}\int_\infty^0 e^{-x}x^p\frac{dx}{x} = (1-e^{2\pi ip})\Gamma(p).$$

L'intégrale converge pour tout p car l'intégrale $\int_1^\infty e^{-x}x^{p-1}dx$ converge pour tout p alors par le théorème des zéros isolés elle est égale à $(1-e^{2\pi ip})\Gamma(p)$ pour tout p.

1b : Noterons

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$$

Soit $\gamma(R)$ le chemin composé de $\gamma_+(R) = [0, R]$, $\gamma_-(R) = [-R, 0]$ et γ_0 le demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieure. Alors

$$\int_{\gamma(R)} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = 2\pi i \operatorname*{Res}_{ia} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = 2\pi i\frac{\ln ia}{2ia} = \frac{\pi^2 i}{2a} + \pi\frac{\ln a}{a}$$

De l'autre coté

$$\int_{\gamma_-(R)} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \int_{-R}^0 \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx = \int_R^0 \frac{\ln(-x)}{(-x)^2+a^2}d(-x) = \int_0^R \frac{\pi i + \ln x}{x^2+a^2}dx \to$$
$$\to I + \pi i\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = I + \frac{\pi^2 i}{2a}$$

Donc $I + I + \frac{\pi^2 i}{2a} = \frac{\pi^2 i}{2a} + \pi\frac{\ln a}{a}$. D'où $I = \pi\frac{\ln a}{2a}$.

1c : D'abord observons que

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - sin3x) = \frac{1}{4}\Im m(3e^{ix} - e^{3ix} - 2) =$$
$$= \frac{1}{4}\Im m(3 + 3ix - \frac{3}{2}x^2 - 1 - 3ix + \frac{9}{2}x^2 - 2 + O(x^3)) = \Im m\left(\frac{3}{4}x^2 + O(x^3)\right).$$

Soit $\gamma_1 = [r, R]$, γ_2 le demi-cercle de rayon R dans le demi-plan supérieur, $\gamma_3 = [-R, -r]$ et γ_2 le demi-cercle de rayon r dans le demi-plan supérieur.

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x^3}dx = \lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \frac{1}{2}\int_{\gamma_3\cup\gamma_1} \frac{\sin^3}{x^3}dx = -\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}} \frac{1}{2}\int_{\gamma_2\cup\gamma_4} \frac{\sin^3 x}{x^3}dx =$$
$$= -\lim_{R\to\infty}\Im m\frac{1}{2}\int_{\gamma_2}\frac{3e^x - e^{3x} - 2}{x^3}dx - \lim_{r\to 0}\Im m\frac{3}{8}\int_{\gamma_4}\frac{1+O(x)}{x}dx =$$
$$= -\frac{3}{8}\Im m\int_\pi^0 e^{-it}de^{it} = \frac{3\pi}{8}.$$

2 : Par la formule de Bürmann-Lagrange la série de Taylor de la fonction réciproque

$$g(z) = z + b_2z^2 + b_3z^3 + \cdots$$

où

$$b_n = \frac{1}{n}\left(\frac{z}{f(z)}\right)^n[n-1] = \frac{1}{(1-z^2)^n}[n-1] = \frac{1}{n}\sum_k \binom{n-1+k}{n-1}z^{2k}[n-1] =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n}\binom{\frac{3}{2}(n-1)}{n-1} & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = \begin{cases} \frac{\frac{3n-3}{2}!}{n!(\frac{n-1}{2}!)} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

3a :

$$\left(\frac{\partial}{\partial a}+\frac{\partial}{\partial b}\right)\int_a^b (\ln f d\ln g - \ln g(a) d\ln f)|_{a=b} =$$
$$= (\ln f(b)g'(b)/g(b) - \ln g(a)f'(b)/f(b) - \ln f(a)g'(a)/g(a) + \ln g(a)f'(a)/f(a))|_{a=b} = 0.$$

Donc l'intégrale ne dépend pas de point $a=\gamma(0)=\gamma(1)$.

Pour simplifier les formules noterons $f_0 = f(\gamma(0))$ et $g_0 = g(\gamma(0))$.

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma ((\ln f + 2\pi i)d\ln g - \ln g_0 d\ln f)\right) = \{f,g\}_\gamma \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int 2\pi i d\ln g\right) = \{f,g\}_\gamma.$$

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\ln f d\ln g - (\ln g_0 + 2\pi i))d\ln f)\right) = \{f,g\}_\gamma \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int -2\pi i d\ln f\right) = \{f,g\}_\gamma.$$

donc f, g ne dépend du choix de la branche de logarithme.

3b : Soit $k=\frac{1}{2\pi i}\int d\ln f$, $l=\frac{1}{2\pi i}\int d\ln g$. Alors

$$\{f,g\}_\gamma\{g,f\}_\gamma = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\ln f d\ln g + \ln g d\ln f - \ln g_0 d\ln f - \ln f_0 d\ln g\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (d(\ln f \ln g) - \ln g_0 d\ln f - \ln f_0 d\ln g\right) =$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2\pi i}((\ln f_0 + 2\pi i k)(\ln g_0 + 2\pi i l) - \ln f_0 \ln g_0 - 2\pi i k \ln g_0 - 2\pi i l \ln f_0)\right) =$$
$$= \exp(2\pi i k l) = 1.$$

3c :

$$\{f_1 f_2, g\}_\gamma = \exp\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln f_1 f_2 d\ln g - \ln g_0 d\ln f_1 f_2 =$$
$$= \exp\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (f_1 d\ln g - \ln g_0 d\ln f_1) + (f_2 d\ln g - \ln g_0 d\ln f_2) = \{f_1,g\}_\gamma\{f_2,g\}_\gamma$$

3d : Observons que $\{f,g\}_\gamma = 1$ si f et g sont holomorphe et ne s'annulent pas à l'intérieur du chemin γ. Effectivement, les formes $\ln f d\ln g$ et $d\ln f$ sont holomorphe à l'intérieur de γ.

Donc $\{a,b\}_\gamma = 1$.

Calculons maintenant pour γ un cercle autour de 0 et f holomorphe et sans zéros à l'intérieur de γ

$$\{f,z\}_\gamma = \exp\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln f\frac{dz}{z} = \exp\frac{1}{2\pi i}2\pi i \operatorname*{Res}_0 \ln f\frac{dz}{z} = f(0)$$

Ici on a utilisé que $\int_\gamma d\ln f = 0$.

Donc $\{a,z\}_\gamma = a$.

Et finalement

$$\{z,z\}_\gamma = \exp\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \ln z d\ln z - z_0 d\ln z =$$
$$= \exp\frac{1}{2\pi i}(\ln z_0 + 2\pi i)^2/2 - (\ln z_0)^2/2 - \ln z_0(\ln z_0 + 2\pi i) + (\ln z_0)^2 =$$
$$= \exp(\pi i) = -1.$$

Donc $\{z,z\}_\gamma = -1$

3e : Soit $\tilde{f} = f(z)/a_k z^k$ et $\tilde{g} = g(z)/b_l z^l$. Elles sont holomorphes et ne s'annule pas à l'intérieur de γ.

$$\{f,g\}_\gamma = \{a_k z^k \tilde{f}, b_l z^l \tilde{g}\}_\gamma = \{a_k, b_l\}_\gamma \{a_k, z^l\}_\gamma \{a_k, \tilde{g}\}_\gamma \{z^k, b_l\}_\gamma \{z,z\}_\gamma^{kl} \{z,\tilde{g}\}_\gamma \{\tilde{f}, b_l\}_\gamma \{\tilde{f}, z\}_\gamma \{\tilde{f}, \tilde{g}\}_\gamma =$$
$$= \{a_k, z\}_\gamma^l \{z, b_l\}_\gamma^k \{z,z\}_\gamma^{kl} = (-1)^{kl} a_k^l b_l^{-k}.$$

3f : Observons que $\{z-\mu_j, z-\lambda_i\}_\gamma = \lambda_i - \mu_j$ et $\{b, \zeta - \lambda_i\} = b$. Donc

$$\{g,f\} = \{b\prod(z-\mu_j), a\prod(z-\lambda_i)\}_\gamma = b^k \prod(\lambda_i - \mu_j)$$