Année 2025-2026

L3 (S6) – Analyse complexe.

Contrôle continu. Parcours magistère.

11 mai 2026

Durée 2 heures. Utilisation des documents autorisée, mais pas encouragée.

Exercice 1.

a. Trouver la série de Taylor de la fonction réciproque de la fonction

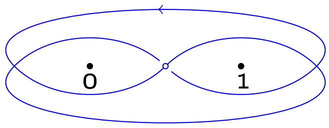
$$f(z) = \frac{z}{1+z^3}.$$

b. Trouver sa rayon de convergence.

Exercice 2.

Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma t^r(1-t)^s dt$$

où γ est le chemin de Pochhammer 

, en termes de la fonction Γ. La branche de la fonction $t^r(1-t)^s$ est choisie réelle en 1/2 (le point).

Exercice 3.

Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx$$

où b est un nombre réel positif.

Exercice 4.

Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n+n^2}.$$

Exercice 5.

Trouver le nombre de racines (comptées avec multiplicités) de l'équation

$$e^z + 3z^5 - 1 = 0$$

dans le cercle unité.

Exercice 6.

Calculer l'intégrale

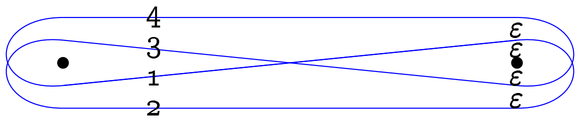
$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_{\mathbb{R}+i\varepsilon} \frac{e^{iaz}dz}{z\,\mathrm{sh}\,\pi z}$$

Correction :

1a. Soit $g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$ la fonction réciproque. Par la formule de Bürmann-Lagrange $c_n = \frac{1}{n}\left(\frac{z}{f(z)}\right)^n [n-1] = \frac{1}{n}(1+z^3)^n[n-1] = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z^{3k}[n-1]$. D'où $c_{3k+1} = \frac{1}{3k+1}\binom{3k+1}{k} = \frac{(3k)!}{(2k+1)!k!}$ et $c_n = 0$ si $n \not\equiv 1 \mod 3$. Finalement $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3k)!}{(2k+1)!k!} w^{3k+1} = w + w^4 + 3w^7 + 12w^{11} + 55w^{15} + \cdots$.

1b. $f'(z) = \frac{1-2z^3}{(1+z^3)^2}$, donc les points critiques sont $\sqrt[3]{1/2}\zeta^k$ où $k = 0, 1, 2$ et $\zeta = e^{2\pi i/3}$ Les valeurs critiques sont $\frac{\sqrt[3]{4}\zeta^k}{2(1+1/2)} = \sqrt[3]{4}\zeta^k/3$. Donc le rayon de convergence est $\sqrt[3]{4}/3$.

2.



Soit $\alpha = t^r(1-t)^s dt$. Considérons une famille de chemins homotope à γ et paramétré par un petit paramètre ε. Ces chemins sont composé de quatre segments $s_1, \ldots, s_4$ et quatre arcs. Noterons $I_k = \int_{s_k} \alpha$. Clairement $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1 = B(r+1, s+1)$. Puis $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_2 = -e^{-2\pi i s}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_1$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_3 = -e^{-2\pi i r}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_2$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_4 = -e^{2\pi i s}\lim\limits_{\varepsilon\to 0} I_2$. Alors $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = B(r+1, s+1)(1 - e^{-2\pi i s} + e^{-2\pi i s}e^{-2\pi i r} - e^{-2\pi i s}) =$ $= \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(r+s+2)}(1-e^{-2\pi i r})(1-e^{-2\pi i s})$.

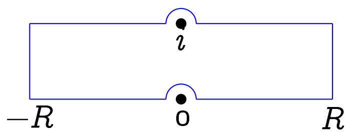
3. $\int_0^\infty \frac{x\sin x}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\Im m\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx = \frac{1}{2}\Im m \lim\limits_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{R} + \int_{C(0,R)\cap H}\right)\frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx = \Im m\, \pi i \operatorname*{Res}_{ib}\frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx = \Im m \pi i\frac{ibe^{-b}}{2ib} =$ $= \frac{\pi}{2}e^{-b}$.

4. Soit $\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\pi z}{(1+z+z^2)}dz$ et $\omega = e^{2\pi i/3}$. $\operatorname*{Res}_{n}\alpha = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n+n^2}$, $\operatorname*{Res}_{\omega}\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\pi\omega}{\omega-\bar{\omega}} = \frac{\operatorname{ctg}\pi(-1/2+i\sqrt{3}/2)}{i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg} i\pi\sqrt{3}/2 =$

$= -\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{th}\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \operatorname*{Res}_{\bar{\omega}}\alpha$. Donc $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+n+n^2} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{th}\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = 0$.
Et finalement $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n+n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+n+n^2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}\operatorname{th}\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

5. Pour $|z| = 1 \Rightarrow |e^z| < e \Rightarrow |e^z - 1| < e + 1 < 3$. Donc $3 = |3z^5| > |e^z - 1|$ et par le théorème de Rouché le nombre de racines de l'équations et le même que celui de l'équation $3z^5 = 0$, donc 5.

6. Soit γ_R le chemin montré sur le dessin :



.

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{i}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{0}\frac{e^{ia(z+i)}dz}{\operatorname{sh}\pi(z+i)} = -2\pi i e^{-a}\operatorname*{Res}_{0}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} = -2ie^{-a} =$$

$$= \int_{\gamma_R}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} = \int_{\gamma}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} - \int_{\gamma+1}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} = (1+e^{-a})\int_{\gamma}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} \Rightarrow \int_{\gamma}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z} = \frac{-2ie^{-a}}{1+e^{-a}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \displaystyle\int\frac{e^{iaz}dz}{z\operatorname{sh}\pi z} = i\int\int_{\gamma}\frac{e^{iaz}dz}{\operatorname{sh}\pi z}da = \int 2\frac{e^{-a}da}{1+e^{-a}} = -2\int\frac{de^{-a}}{1+e^{-a}} = -2\ln(1+e^{-a}) + C$. Mais $C = 0$ car

$$\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma}\frac{e^{iaz}dz}{z\operatorname{sh}\pi z} = \lim_{\substack{a\to+\infty\\ R\to\infty}}\int_{\gamma_R}\frac{e^{iaz}dz}{z\operatorname{sh}\pi z} = \lim_{a\to+\infty} 2\pi i\operatorname*{Res}_{i}\frac{e^{iaz}dz}{z\operatorname{sh}\pi z} = 0.$$

Donc finalement $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{\gamma}\frac{e^{iaz}dz}{z\operatorname{sh}\pi z} = -2\ln(1+e^{-a})$