Exercice 1. Pour les équations suivantes déterminer si elles sont A : linéaire, B : homogène, C : autonome.

a. (1.3.1) Le modèle de Verhulst de croissance des populations :

$$x'(t) = ax(t)(1 - x(t)/K).$$

b. (1.3.2) Mouvement forcé d'un ressort.

$$mx''(t) + kx(t) = F(t).$$

c. (1.3.3) Mouvement forcé d'un ressort avec freinage.

$$mx''(t) + \kappa x'(t) + kx(t) = F(t).$$

d. (1.3.4) Un circuit électrique avec inductance L, résistance R, capacité C et tension extérieure $U(t)$

$$Lq''(t) + Rq'(t) + q(t)/C = U(t).$$

Exercice 2. Pour les équations suivantes explicites les comme équations d'ordre 1.

a. (1.2.3) Systèmes de ressorts

$$\begin{aligned} m_1 x_1''(t) &= -\, k_{01}x_1 + k_{12}(x_2(t) - x_1(t)), \\ m_1 x_2''(t) &= -\, k_{02}x_1 + k_{12}(x_1(t) - x_2(t)). \end{aligned}$$

b. (1.2.4) Chute avec freinage

$$mx''(t) = -mg - \kappa x'(t).$$

c. (1.2.5) Pendule libre.

$$\theta''(t) + \omega^2 \sin\theta(t) = 0.$$

ainsi pour les équations 1.3.2 et 1.3.3.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes et tracer le portrait de phase

a. (1.2.1) Décomposition d'une substance radioactive.

$$x'(t) = -kx(t)$$

b. (1.12.2a)

$$y' = y^2 + 1$$

c. (1.12.2b)

$$y' = y^2$$

d. (1.12.2c)

$$y' = y^2 - 1$$

e. (1.12.3) Oscillations libres d'un ressort

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

f. (1.12.4)

$$mx''(t) = -mg - \kappa x'(t).$$

g. (1.13.6)

$$\theta''(t) + \omega^2 \sin\theta(t) = 0.$$

h. (1.13.7) Système prédateur-proie (Lotka-Volterra) :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(cx(t) - d) \end{cases}$$

Indication : Montrer que $cx - d\ln x + by - a\ln y$ est l'intégrale première de ce système.

Exercice 4. (1.13.8) Résoudre l'équation

$$y' = \frac{t^2}{1 - y^2}.$$

Exercice 5. (2.8.2) Calculer e^{tA} pour A l'une des matrices suivantes :

$$\text{a. } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ b. } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ c.} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ d. } \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{ e. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ f. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. (2.8.3)

a. Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA}.

b. Tracer le portrait de phase de l'EDO

$$\begin{cases} x' &= 2x - 4y, \\ y' &= x - 3y. \end{cases}$$

Exercice 7. (2.8.4) Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer e^{tA} et tracer le portrait de phase de l'EDO correspondante.

Exercice 8. (2.8.5) Selon la valeur du paramètre $\mu \in \mathbb{R}$, tracer le portrait de phase l'équation de van der Pol linéarisée $y'' - \mu y' + y = 0$.

Exercice 9. (2.8.6) Considérons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x' = 2x - 4y, \\ y' = x - 3y + 10\sin t. \end{cases}$$

a. Calculer l'exponentielle e^{tA}, où A est la matrice correspondant au système.

b. Trouver une solution particulière de la forme suivante :

$$\begin{cases} x = 12\sin t + b\cos t, \\ y = 7\sin t + d\cos t. \end{cases}$$

c. Donner l'ensemble des solutions bornées sur $\mathbb{R}_{>0}$ ainsi que celui des solutions périodiques sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10. (2.11.1) Résoudre l'EDO

$$y''' + y'' + y' + y = \cos(t)$$

.

Exercice 11. (2.11.20) On souhaite résoudre l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^t + 9t.$$

a. Donner le polynôme caractéristique de l'équation, et les solutions de l'équation homogène associée.

b. Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = 9t.$$

c. Trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' - 4y' + 3y = 2e^t.$$

d. En déduire la forme des solutions générales de l'équation.

e. Déterminer la solution de l'équation vérifiant $y(0) = 3$ et $y'(0) = 1$.

Exercice 12. (2.11.3) Pour l'équation

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$$

tracer les portraits des phases en fonction la valeur du paramètre a.

Exercice 13. La même question pour l'équation

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$$

Exercice 14. (2.11.4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

a. Montrer que l'EDO

$$y'' - y = f$$

admet au plus une solution y telle que $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$

b. Montrer que la solution générale de cette équation est $y(t) = ae^t + be^{-t} + \int_0^t \mathrm{sh}(t-s)f(s)ds$.

c. Montrer que l'expression

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^t e^{s-t}f(s)ds + \int_t^\infty e^{t-s}f(s)ds).$$

donne la solution de l'équation satisfaisant les conditions $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} y(x) = 0$.

Exercice 15. (2.11.5) Expliciter l'ensemble des solutions maximales de

$$y' - ay = e^{-|t|}.$$

Exercice 16. (2.11.6) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $\int_{-\infty}^{\infty} |f| dt$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |tf| dt$ convergentes. On étudie l'équation

$$y'' + y = f$$

a. Montrer que cette équation possède deux solutions $y^{\pm}(t)$ tels que $\lim_{t\to\pm\infty} y^{\pm}(t) = 0$.

b. Montrer l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{t\to\infty}(y^{-}(t) - \alpha\cos t - \beta\sin t) = 0$. Exprimer α et β en fonction de f.

c. Montrer que pour toute solution $y(t)$ il existe $u, v \in \mathbb{R}$ uniques tels que $lim_{t\to-\infty}(y(t) - u\cos t - v\sin t) = 0$, et montrer que $\lim_{t\to\infty}(y(t) - (u+\alpha)\cos t - (v+\beta)\sin t) = 0$.

Exercice 17. (2.11.7) Résoudre

$$y' + y = \frac{1}{1+2e^x}.$$

Exercice 18. (4.6.1) Résoudre

$$ty' = 2y + t^3$$

pour $t < 0$ et pour $t > 0$.

Exercice 19. (4.6.2) Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(x^2+1)y' + 2xy = 1, \ x \in \mathbb{R},$$

puis déterminer la solution telle que $y(0) = 1$.

Exercice 20. Déterminer les solutions des équations suivantes

a. $y'\sin t - y\cos t + 1 = 0$.

b. $(1-t^2)y' - 2ty = t^2$.

c. $t^2y'' - ty' + y = 0$. *Indication :* Changer la variable $x = \pm e^u$.

d. $2t(1-t)y' + (1-t)y = 1$,

Exercice 21.* Soient $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions 1-périodiques. Sous quelles conditions l'équation différentielle $y' = ay + b$ admet-elle des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et 1–périodiques ? Les déterminer.

Exercice 22. Résoudre l'EDO $Y' = A(t)Y + b(t)$, avec

a.

$$A(t) = \begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \ b(t) = t\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

b.

$$A(t) = (t^2+1)^{-1}\begin{pmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \ b(t) = \begin{pmatrix} 2t^2-1 \\ 3t \end{pmatrix},$$

c.*

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1/(2t) & 1/(2t^2) \\ 1 & 1/(2t) \end{pmatrix}, \ b(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \end{pmatrix},$$

d.
$$A(t) = \begin{pmatrix} 2/t & 3 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}, \ b(t) = 0.$$

Exercice 23*. Calculer la résolvante du système correspondant

a.
$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix}$$

b.
$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ 0 & c(t) \end{pmatrix}$$

c.
$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ d(t) & c(t) \end{pmatrix}$$

Exprimer le résultat en somme d'une série.

Exercice 24. (4.10.1) Supposons connue une solution particulière non nulle y_0 de l'EDO
$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = 0.$$
où les coefficients p et q dépendent de t.

1. Montrer que sur un intervalle sur lequel y_0 ne s'annule pas, l'opérateur différentiel $\frac{\partial^2}{\partial t^2} + p\frac{\partial}{\partial t} + q$ est égal au produit $(\frac{\partial}{\partial t} + p + y_0'/y_0)(\frac{\partial}{\partial t} - y_0'/y_0)$. En déduire une solution de l'EDO initiale linéairement indépendante de y_0.
2. Montrer que si y est une solution de l'EDO, alors $W := y_0y' - y_0'y_0$ satisfait l'EDO $W' = -pW$. En déduire une construction alternative d'une solution de l'EDO initiale linéairement indépendante de y_0.
3. Trouver une base de solutions des équations suivantes après avoir identifié une solution polynomiale
   a. $t^2(1-t^2)y'' + t^3y' - 2y = 0$,
   b. $(2t+1)y'' + (4t-2)y' - 8y = 0$,
   c. $(t^2+t)y'' + (t-1)y' - y = 0$,
   d. $(t^2-3)y'' - 4ty' + 6y = 0$.

Exercice 25.

a. Etablir une bijection entre les solutions de l'équation $z' = Az + B$ avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, où, α, β and b dépendent de t, et une équation scalaire linéaire d'ordre 2.

b. Soit $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une équation linéaire de dimension 2. Trouver l'équation scalaire d'ordre 2 dont les solutions sont données par le rapports x/y.

c. Soit y_1 et y_2 deux fonctions sur $\mathbb{R}$ trouver l'équation d'ordre 2 dont ces fonctions sont des solutions.

d. Pour une équation d'ordre 2 de la forme $y'' + qy = 0$ le rapport de deux solutions linéairement indépendant est égale à f. Exprimer q en termes de f.

Exercice 26. (4.10.2) Résoudre l'EDO de Bernoulli

$$y' = -\frac{2y}{t} + \frac{\ln(t)}{t}y^2$$

dans le domaine $t > 0$, puis déterminer une solution particulière telle que $\lim_{t\to\infty} t^2 y(t) = -1$.

Exercice 27. (4.10.3) Résoudre l'équation de Riccati

$$\cos(t)y' = \cos(t)y^2 - (2\cos^2(t) + \sin(t))y + \cos^3(t)$$

sur $]-\pi/2, \pi/2[$

Exercice 28. (5.6.1,3,5,6,7) Les problèmes de Cauchy suivants admettent-ils une solution ? Si oui, une solution maximale est-elle unique ? Que peut-on dire de son intervalle de définition ?

a . $x' = te^{-t^2} + \dfrac{x^5}{1+x^4}\cos(e^{t+x}),\ x(0) = x_0,$

b . $x' = \dfrac{2tx + \cos t}{t^2 + e^x},\ x(0) = x_0,$

c . $x' = (x^2 + t^2)\sin(x),\ x(0) = x_0,$

d . $x' = t\sqrt{t^2 + x^2},$

e . $x' = |x| + |t|$. Résoudre explicitement. La solution est-elle C^2.

f . $x' = \dfrac{e^{x^2}}{x(1+t^2)},\ x(0) = 1$. Résoudre explicitement,

g . $x' = -\dfrac{x^2 + tx + t^2}{t^2},\ x(1) = 0$. Résoudre explicitement.

h . $x'' + x^3 = 0$. *Indication :* Considérer l'intégrale première $(x')^2 - x^2/2$.

i . $x'' + kx' + \omega^2 \sin x = 0$.

j . $x' = \sin(x)\exp(\dfrac{x}{1+t^2})$.

k . $u' = (1 + \cos(t))u - u^3$.

l . $x' = 2x^2 - \cos(x)$.

Exercice 29. (5.6.2) Les problèmes de Cauchy suivants admettent-ils une solution ? Si oui, une solution maximale est-elle unique ? Que peut-on dire de son intervalle de définition ?

a. $\begin{cases} x' = x + \sin(x^2 + y^8), \\ y' = e^x - 1. \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy. \end{cases}$. Résoudre explicitement

Exercice 30. $x' = \dfrac{4t^3x}{(t^4 + x^2)}$. Résoudre explicitement. *Indication :* Chercher la solution de la forme $x = t^2 z$.