Exercice 1. (1.4.1) Il y a deux sortes d'atome de carbone : les ^{12}C les plus nombreux et les ^{14}C qui sont radioactifs. On admet que le taux de concentration τ_0 de ^{14}C est constant dans l'atmosphère (il est produit par le rayonnement cosmique et son taux reste constant, sinon soit l'atmosphère serait totalement radioactive et nous ne serions pas là pour en parler, soit il n'y aurait plus de ^{14}C du tout). Ainsi tant qu'un organisme est vivant et qu'il absorbe du carbone (si c'est une plante, par exemple) son taux de concentration en ^{14}C est constant égal à τ_0. Dès qu'il meure, comme le ^{14}C se désintègre le taux va baisser. En fait il baisse suivant une loi probabilité : la probabilité qu'un atome de se désintègre entre l'instant t et l'instant $t + dt$ est $dp = \lambda dt$. On suppose que le nombre d'atomes radioactifs est petit devant le nombre total. (En fait $\tau_0 = 1.3 \cdot 10^{-12}$, ce qui veut dire que dans 12 grammes de carbone il y a $6.0 \cdot 10^{23} \times 1.3 \cdot 10^{-12} = 7.9 \cdot 10^{11}$ atomes radioactifs).

a. Si $\tau(t)$ est le taux de ^{14}C à l'instant t démontrer que
$\tau(t + \Delta t) - \tau(t) = -\lambda\tau(t)\Delta t + o(\Delta t)$

b. En déduire que $\dfrac{d\tau}{dt} = -\lambda\tau$.

c. Au bout de combien de temps la moitié des atomes de ^{14}C présents à l'instant 0 ont disparu ?

d. Proposer un expérience de durée 1 an pour évaluer λ. On trouve $\lambda = 1.2 \cdot 10^{-4} an^{-1}$.

e. Un papyrus a un taux de concentration de ^{14}C égal à $0.92 \cdot 10^{-12}$. Quel âge a-t-il ?

f. Supposons qu'en fait $\lambda = 1.1 \cdot 10^{-4} an^{-1}$ ou $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-4} an^{-1}$ qu'aurait on trouvé ?

Exercice 2. (1.4.2) Un récipient contient 100 litres d'eau mélangée à de l'alcool, à la concentration de 10% (1 partie de l'alcool et 9 parties de l'eau). On le remplit à la vitesse de 5 litres par minute avec de l'eau et il se vide à la même vitesse.

a. Quelle équation différentielle satisfait la concentration de l'alcool ?

b. Au bout de combien de temps celle-ci est inférieure à 1%.

Exercice 3. (1.4.3) On considère l'équation différentielle (E) $\dfrac{dx}{dt} = ax + b(t)$, où a est une certaine constante et b une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. On pose $y(t) = x(t)e^{-at}$. Quelle équation différentielle satisfait y ?

b. En déduire la solution de l'équation (E) telle que $x(t_0) = x_0$

c. Résoudre l'équation quand $b(t) = t^2$, $a = -1$.

Exercice 4. (1.4.4) On considère l'équation différentielle linéaire dans $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\omega \\ \omega & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a. En posant $z = x + iy$, écrire l'équation sous la forme complexe $\dfrac{dz}{dt} = f(z)$ et la résoudre.

b. Dessiner les solutions quand $\lambda = 1$, $\omega = 2\pi$.

Exercice 5. (1.4.5) Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. On considère l'équation autonome $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$.

a. Rappeler pourquoi on dit que l'équation est autonome.

b. Démontrer que si la fonction x définie sur un intervalle $]a, b[$ est une solution de cette équation, telle que $x(t_0) = x_0$ alors la fonction y définie par $y(t) = x(t - c)$ est une solution définie sur $]a + c, b + c[$.

c. Si $x(t)$ et $y(t)$ sont deux solutions et si $x(t_0) = y(t_1)$ démontrer que pour tout t, $y(t) = x(t - t_1 + t_0)$.

Exercice 6. (1.4.6) Modèle logistique (*Pierre-François Verhulst*, 1836).

On étudie une population de mammifères dans un parc animalier. Soit $N(t)$ le nombre de ces animaux. On observe que si $N > A$ il n'y a pas assez à manger et la population décroît, alors que si $N < A$ elle a tendance à augmenter. Verhulst (1836) a décidé de modéliser cela par l'équation

$$(E) \qquad \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{A}\right)$$

a. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $x = \frac{N}{A}$.

b. En notant que cette équation est une équation autonome de dimension 1, la résoudre explicitement.

c. Dessiner (peut être avec votre logiciel préféré) cette solution, en supposant que $r = 0.15$, $A = 1500$, $N_0 = 100, 1000, 10000$.

Exercice 7. (1.4.7) Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que en tout point de Ω, l'une des deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ est non nulle.

On note C_λ la courbe de niveau $\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = \lambda\}$.

a. Rappeler le théorème des fonctions implicites, et démontrer qu'au voisinage d'un point (x_0, y_0) tel que $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ on peut décrire C_λ comme graphe d'une fonction $y(x)$ dont on calculera la dérivée.

b. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $c : I \to \Omega$ une fonction de classe C^1 : autrement dit, $c(t) = (x(t), y(t))$ est une courbe paramétrée. Démontrer que $c(t)$ reste dans une courbe C_λ si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

c. Démontrer que les courbes de niveau de f sont les solutions de l'équation différentielle $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} / \frac{\partial f}{\partial y}$ (qu'on écrit aussi $\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$).

d. Ecrire une équation différentielle dont les graphes des solutions sont les hyperboles $x^{-1} + y = \lambda$ du demi plan $x > 0$. Sur quel intervalle est définie la solution $y(x)$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Exercice 8. (1.4.8) Système conservatif.

Une particule se promène dans un champs de forces. Newton nous dit que sa position $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ satisfait l'équation différentielle du second ordre $m\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = \vec{F}$.

On suppose que $\vec{F}$ dérive d'une potentiel $\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$.

a. On note $\vec{X}(t)$ la position à l'instant t. Montrer que $\vec{X}'(t) = \vec{Y}(t)$ satisfait $\frac{d}{dt}U(\vec{X}(t)) = \langle \vec{\nabla}U, \vec{Y}(t)\rangle$, et en déduire que $U(\vec{X}(t)) + \frac{m}{2}\langle \vec{Y}, \vec{Y}\rangle$ reste constant.

b. On suppose la pesanteur est un vecteur constant $\vec{g} = -9.8 m \cdot s^{-2} \cdot \vec{k}$, où $\vec{k}$ est un vecteur unitaire dirigé vers le haut. Trouver U tel que $\vec{\nabla}U = -m_0\vec{g}$ et en déduire à quelle hauteur un objet lancé verticalement à la vitesse $v = 10 m \cdot s^{-1}$ va monter (on néglige les frottements de l'air).

Exercice 9.* (1.4.9) Equation Prédateurs-Proies : *Lotka 1925, Volterra 1926.*

Il s'agit d'une variante de l'équation logistique, ou maintenant on suppose qu'une population est non pas régulée par une constante (la quantité de nourriture) mais par un prédateur. Dans la littérature on l'appelle l'équation Prédateurs-Proies, ou Lynx et Lapins.

On considère l'équation $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x(1-y) \\ y(1-x) \end{pmatrix}$ définie sur l'ouvert $x > 0$, $y > 0$.

a. Dessiner le champs de vecteur associé. On commencera par chercher ou il s'annule, ou il est vertical vers le haut, vers le bas, horizontal à droite ou à gauche.

b. Montrer que si $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est la solution qui vaut $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à l'instant $t = 0$, $\begin{pmatrix} x(t-t_1) \\ y(t-t_1) \end{pmatrix}$ est la solution qui vaut $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ à l'instant t_1.

Comme on pense à cette équation différentielle comme un champ de vecteur autonome, une solution s'appelle une trajectoire.

c. En utilisant le théorème d'unicité montrer que deux trajectoires sont soit égales soit ne se rencontrent jamais.

d. On note $1, 2, 3, 4$ les régions $(1) : \{x > 1, y > 1\}$, $(2) : \{x > 1, y < 1\}$, $(3) : \{y < 1, x < 1\}$, $(4) : \{x < 1, y > 1\}$. Montrer que si la donnée initiale est dans la région 1 la trajectoire va d'abord rentrer dans la région 2 puis dans la 3 et dans la 4 avant de revenir dans la région 1.

e. Soit $H(x, y) = x - \ln(x) + y - \ln(y)$.
Démontrer que le long d'une trajectoire, la fonction H reste constante.

f. Montrer que la restriction de la fonction H à la demi-droite $x \geqslant 1, y = 1$ est injective, et en déduire que la trajectoire revient à sa position initiale.

g. En utilisant l'unicité montrer que toute trajectoire est périodique.

Exercice 10. (2.7.1) On considère l'équation du second ordre dans $\mathbb{R}$.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0.$$

On pose $z(t) = \frac{dx}{dt} + i\omega x$. Ainsi z est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

a. Quelle équation satisfait z ?

b. Quelle équation satisfait $\bar{z}$?

c. Résoudre l'équation.

Exercice 11. (2.7.2) Soit $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, $x \in E, t \in I$ une équation différentielle linéaire. Soit $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel de ses solutions.

a. En utilisant le théorème d'existence et d'unicité, démontrer que si $x_1, \dots, x_k$ est une famille de solutions, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un instant t_0 de I tel que les vecteurs $x_1(t_0), \dots x_k(t_0)$ sont linéairement indépendants (forment une famille libre).
2. Dans $\mathcal{E}$ les vecteurs $x_1, \dots, x_k$ sont indépendants.
3. Pour tout instant t de I, les vecteurs $x_1(t), \dots x_k(t)$ sont linéairement indépendants.

b. Même question avec « sont une famille génératrice » à la place de famille libre.

Exercice 12. (2.7.3) On rappelle que le barycentre d'une famille de point $a_1, \dots a_k$ d'un espace affine affectée des coefficients $\lambda_1, \dots .\lambda_k$ (avec $\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \lambda_i = 1$) est l'unique point b tel que pour tout point o, $\overrightarrow{ob} = \Sigma_{i=1}^k \lambda_i \overrightarrow{oa_i}$.

Soit $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)$, une équation différentielle linéaire avec second membre.

Vérifier que si $x_i(t)$ est une famille de solutions telle qu'à l'instant t_0, $x_i(t_0) = a_i$, la fonction $\Sigma_{i=1}^k \lambda_i x_i$ est la solution de l'équation différentielle dont la valeur à l'instant t_0 est $\Sigma_{i=1}^k \lambda_i a_i$.

Autrement dit l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre est un espace affine.

Exercice 13. (2.7.4)(Equation de Riccati)

On considère l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ b(t) & d(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

On considère une solution $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et on se place dans un intervalle de temps où y ne s'annule pas.

a. On pose $z(t) = \dfrac{x(t)}{y(t)}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle de la forme

$$z'(t) = q_2(t)z^2 + q_1(t)z + q_0(t).$$

b. Réciproquement, si on a une équation différentielle de la forme (R) $z'(t) = q_2(t)z^2 + q_1(t)z + q_0(t)$, construire une équation différentielle linéaire (L) telle que les solutions de (R) soient précisément les quotients de deux solutions de (L).

c.* Soit E un espace vectoriel de dimension n, I un intervalle de $\mathbb{R}$. On se donne trois applications continues Q, A, B de I a valeurs dans les matrices symétriques $n \times n$, les matrices $n \times n$ et le vecteur colonnes. Expliquer pourquoi l'équation de Riccati

$$\frac{dz_i}{dt} = \Sigma_j q_{ij}(t) z_i z_j + \Sigma_j a_{ij}(t) z_j + b_i(t)$$

peut se ramener à l'étude d'une équation différentielle linéaire en dimension $n+1$.

Exercice 14. (2.7.5) Résoudre, en faisant « varier la constante »

a. $\dfrac{dx}{dt} - 2x = 1$,

b. $\dfrac{dx}{dt} + x = e^t$,

c. $\dfrac{dx}{dt} + 3x = e^{it}$.

Exercice 15. (2.7.6) On, considère l'équation $L\dfrac{dI}{dt} + RI = E$, où L, R, E sont trois constantes positives (circuit LR).

a. Trouver la solution telle que $I(0) = I_0$ est une constante positive donnée.

b. Quelle est la limite de I quand $t \to +\infty$?

Exercice 16. (2.7.7)

a. On considère l'équation $\dfrac{dx}{dt} + ax = b(t)$, où b est définie sur $\mathbb{R}$. La constante a et la fonction b sont à valeurs complexes.

   On suppose que si $t \geqslant 0$, $|b(t)| \leqslant k$, et on suppose que la partie réelle $\mathrm{Re}(a)$ de a est non nulle.

   Soit $x(t)$ la solution telle que $x(0) = 0$. Démontrer que $|x(t)| \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{Re}(a)}(1 - e^{-\mathrm{Re}(a)t})$

b. On considère deux équations $\dfrac{dx_1}{dt} + ax_1 = b_1(t)$, $\dfrac{dx_2}{dt} + ax_2 = b_2(t)$ ou b est définie sur $\mathbb{R}$, et on suppose que $|b_1(t) - b_2(t)| \leqslant k$. On considère des solutions x_1, x_2.

   On suppose que $x_1(0) = x_2(0)$ démontrer que $|x_1(t) - x_2(t)| \leqslant \dfrac{k}{\mathrm{Re}(a)}(1 - e^{-\mathrm{Re}(a)t})$

   On montre ainsi, que si $\mathrm{Re}(a) < 0$, asymptotiquement les solutions de l'équations ne dépendent pas trop du second membre (le bruit), a condition que celui ci soit borné.

Exercice 17. (2.7.8) Résoudre les équations suivantes.

a. $\dfrac{dx}{dt} + \cos(t)x = \sin(2t), \quad \text{ici } t \in \mathbb{R},$

b. $\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{x}{t} = t, \quad \text{ici } t > 0,$

c. $\dfrac{dx}{dt} + 2\dfrac{x}{t} = t^3, \quad \text{ici } t > 0.$

Exercice 18. (2.7.9) On considère une fonction périodique continue $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période T. Soit x une solution non nulle de $\dfrac{dx}{dt} + ax = 0$.

a. Démontrer qu'il existe une constante C telle que $x(t + T) = Cx(t)$.

b. Démontrer que $C = \exp\left(-\displaystyle\int_0^T a(u)du\right)$

c. A quelle condition la fonction x est elle aussi périodique de période T ?

Exercice 19*. (2.7.10) On considère deux fonctions périodiques continue $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période T, et b n'est pas la fonction nulle. Soit x une solution non nulle de $\dfrac{dx}{dt} + ax = b$.

Démontrer que s'il existe une unique solution périodique de l'équation avec second membre, il n'y a pas de solution périodique à l'équation homogène $\dfrac{dx}{dt} + ax = 0$.

Exercice 20. (2.7.11) Repère de Frenet et équation intrinsèque des courbes planes.

On considère, dans le plan affine euclidien orienté, une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne (on dit aussi longueur d'arc), et de classe C^2 ; ainsi la courbe paramétrée est une fonction de classe $C^2 : M : I \to E$, $M(s)$.

a. Démontrer que le vecteur tangent $\vec{t}(s) = \dfrac{dM}{ds}$ est de longueur 1.

b. Soit $\vec{n}(s)$ le vecteur normal tel que $\vec{t}, \vec{n}$ soit une repère direct. On a donc en identifiant E à $\mathbb{C}$, $\vec{n}(s) = i\vec{t}(s)$. Démontrer qu'il existe une fonction continue $\kappa(s)$ telle que :

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa(s)\vec{n} = i\kappa(s)\vec{t}.$$

c. En déduire que la fonction $k : I \to \mathbb{R}$ détermine $\vec{t}$ à une constante près.

d. Touver la fonction $k(\sigma)$ pour un cercle de rayon R.

e. Démontrer que si M_1 et M_2 sont deux courbes paramétrées par l'abscisse curviligne et si $\kappa_1(s) = \kappa_2(s)$, alors M_2 se déduit de M_1 par un déplacement (isométrie directe du plan affine).

Exercice 21. (2.7.12)

a. Soit J une matrice telle que $J^2 = -\mathrm{Id}$, démontrer que $e^{tJ} = \cos(t)\mathrm{Id} + \sin(t)J$.

b. Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a\,\mathrm{Id} + bJ$. En utilisant la première question démontrer que :

$$e^{tA} = e^{ta}(\cos(tb)\mathrm{Id} + \sin(tb)J)$$

c. Soit U un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension 2 dont les deux valeurs propres sont imaginaires. Montrer que celle-ci sont conjuguées.

d. Soit $\lambda = a + ib$ l'une d'entre elle. Montrer qu'il existe une base dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ et en déduire comment calculer e^{tU} (on pourra considérer un vecteur propre e de u dans $\mathbb{C}^2$, et poser $e_1 = \mathfrak{Re}(e)$, $e_2 = \mathfrak{Im}(e)$.

Exercice 22. (2.7.13) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer l'image du carré $|x| \leqslant 1$; $|y| \leqslant 1$ par $\exp A$.

Exercice 23. (2.7.14) Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, calculer B^n, C^n et en déduire $\exp tB, \exp tC$.

Exercice 24.* (2.7.15) L'application exponentielle est définie $\exp : M_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C}) \subset M_n(\mathbb{C})$.

a. Si $H \in M_n(\mathbb{C})$ est une matrice de norme < 1 démontrer que la série $\ln(\mathrm{Id} + H) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k} H^k$ est convergente.

b. Montrer que si M est suffisamment proche de l'identité, par exemple $\|M\| \leqslant \frac{1}{10}$, $\|\exp M - \mathrm{Id}\| < 1$.

c. Soit M une matrice diagonalisable suffisamment proche de zéro, démontrer que $\ln(\exp M) = M$.

d. Montrer que l'ensemble des matrices telles que $\|M\| \leqslant \frac{1}{10}$ et $\ln(\exp M) - M = 0$ est fermé.

e. Montrer que dans la boule fermée $\|M\| \leqslant \frac{1}{10}$ l'ensemble des matrices diagonalisables est dense.

f. En déduire que si $\|M\| \leqslant \frac{1}{10} \leqslant \ln(\exp M) = M$.

g. Par un argument analogue démontrer que si $\|M - \mathrm{Id}\| \leqslant \frac{1}{10}$, $\exp(\ln(M)) = M$.

h. Soit $f:(\mathbb{R},+)\to(GL_n(\mathbb{C}),\cdot)$ un homomorphisme continu.
Soit $\alpha>0$ tel que si $|t|\leqslant\alpha$, alors $\|f(t)-\mathrm{Id}\|\leqslant\frac{1}{10}$.
Démontrer que si $|t|\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$ et si $|u|\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$ alors $\ln f(t+u)=\ln f(t)+\ln f(u)$.

i. Soit n_0 tel que $\dfrac{1}{n_0}\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$.
En déduire que pour tout $|t|\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$ $\ln f(t)=n_0t\ln f\left(\frac{1}{n_0}\right)$ (on pourra commencer par les réels t de la forme $t=\dfrac{1}{n\cdot n_0}$). Et que si $|t|\leqslant\dfrac{\alpha}{2}$, $f(t)=\exp tA$, pour $A=n_0\cdot f\left(\dfrac{1}{n_0}\right)$.

j. Démontrer que cette formule reste vraie pour tout t dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25*. (2.7.16) Démontrer que si E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, $A\in\mathrm{End}(E)$ un endomorphisme, la décomposition de Dunford $A=D+N$, D diagonalisable, N nilpotente, et D et N commutent est unique. On pourra utiliser le fait que si A commute avec une matrice D', les sous-espace propre de D' sont stables par A.

Exercice 26! Soit $P(x)$ un polynôme de dégrée n et $f(x)$ une fonction entière.

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme $R(x)$ de dégrée $<n$ tel que $f(x)=P(x)S(x)+R(x)$, où $S(x)$ est une fonction entière. *Indication :* Si $P(x)=\prod(x-\lambda_i)^{\nu_i}$ alors $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}(R(x)-f(x))|_{x=\lambda_i}=0$ pour toutes racines λ_i et pour $k<\nu_i$.

b. Montrer que pour toute matrice tel que $P(X)=0$ on a $f(X)=R(X)$.

Cela permet de calculer en particulier l'exponentiel d'une matrice sans chercher les vecteurs propres.

Exercice 26. (2.7.17) Soit $M\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $(\lambda_1,\dots\lambda_n)$ ses valeurs propres.
Soit L_i le polynôme de Lagrange $L_i(X)=\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq i}\dfrac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$.

a. Montrer que : $\exp(M)=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}e^{\lambda_i}L_i(M)=Q(M)$, où $Q=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}e^{\lambda_i}L_i$.

b. Montrer que si $M\in M_n(\mathbb{R}), Q\in\mathbb{R}[X]$.

c. Si $n=2$, il existe donc deux coefficients α,β tels que $e^M=\alpha M+\beta\mathrm{Id}$; exprimer α,β en fonction des valeurs propres de M, puis en fonction de la trace et du déterminant.

d* Si M n'est pas diagonalisable, son polynôme minimal est de la forme $\prod\limits_{1\leqslant i\leqslant m}(X-\lambda_i)^{\nu_i}$. En utilisant la décomposition de Dunford, montrer comment calculer $\exp M$ avec le polynômes de Sylvester, $S_{i,k}=\dfrac{(X-\lambda_i)^k}{(\lambda_j-\lambda_i)^k}\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant m, j\neq i}\dfrac{(X-\lambda_j)}{\lambda_i-\lambda_j}$, avec $1\leqslant i\leqslant m, 0\leqslant k\leqslant\nu_i-1$.

Exercice 27*. (2.7.18) On considère l'espace vectoriel complexe E des solutions de l'équation différentielle à coefficients constants $x^{(n)}+a_{n-1}x^{(n-1)}+\cdots+a_1x'+a_0x=0$. On considère le polynôme associé $P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_n$. On sait que $\dim(E)=n$.

1. Soit D l'opérateur de dérivation $x\to\dfrac{d}{dt}x$. Démontrer que E est stable par D.
2. Montrer que $E=\ker(P(D))$, et que P est le polynôme minimal de la restriction $\bar{D}$ de D à E.
   On écrit P comme produit $P=\prod(X-\lambda_i)^{\nu_i}$.
3. Soit $E_i=\ker(D-\lambda_i)^{\nu_i}$. Montrer que E_i est l'espace vectoriel des fonctions de la forme $p(t)e^{\lambda_i t}$, où p est un polynôme de degré $\deg(p)\leqslant\nu_i-1$.
4. Retrouver le théorème qui décrit toutes les solutions de l'équation.

Exercice 28. (2.7.19) Résoudre.

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} - 3x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dfrac{dx}{dt}(0) = 1,$

b. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + (4i+1)\dfrac{dx}{dt} + x = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dfrac{dx}{dt}(0) = 0,$

c. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + (3i-1)\dfrac{dx}{dt} - 3ix = 0, \quad x(0) = 2, \quad \dfrac{dx}{dt}(0) = 1,$

d. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + (4+2i)\dfrac{dx}{dt} + (3+4i)x = 0, \quad x(0) = \alpha, \quad \dfrac{dx}{dt}(0) = \beta.$

Exercice 29. (2.7.20) Particule dans un champ électro-magnétique.

Un particule de masse m et de charge q se promène dans un champ électro-magnétique constant. Elle subit une force qui se décompose en $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$. L'équation de Newton s'écrit $q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B} = m\dfrac{d}{dt}\vec{V}$.

On se place dans un système de coordonnées ou $\dfrac{\vec{B}}{m} = \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et on pose $\vec{P} = m\vec{V}$ de sorte que l'équation est $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \omega\vec{P} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{C}$, où $\vec{C} = \dfrac{q}{m}\vec{E}$ est un vecteur constant.

a. Ecrire l'équation sans second membre, et la résoudre. (indication quelle est la matrice de l'application linéaire $\vec{P} \to \omega\vec{P} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quelle est son exponentielle ?

b. Résoudre l'équation avec second membre par la méthode de la variation de la constante.

c. La position $\vec{X}(t)$ satisfait $\dfrac{d\vec{X}}{dt} = \vec{V} = \dfrac{1}{m}\vec{P}$, décrire $\vec{X}(t)$.

Exercice 30. (2.7.21) Un projectile sort d'un canon qui tire avec un angle α par rapport à l'horizontale. Il subit donc deux forces : la pesanteur $m\vec{g}$ et le frottement de l'air (proportionnel à la vitesse $-k\vec{v}$). On se place dans le cas où le projectile ne va ni très haut ni très loin (ce n'est pas un missile intercontinental), de sorte que $\vec{g}$ est constant.

a. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par la vitesse de ce projectile.

b. Soit $\vec{w}(t) = \vec{g} \wedge \vec{v}$. Ecrire l'équation différentielle satisfaite par $\vec{w}(t)$, et montrer que le projectile reste dans le plan constant et en déduire qu'à tout instant le projectile reste dans le plan engendré $\vec{g}$ et la vitesse à l'instant initial.

   On se place donc dans le plan en question rapporté à un repère orthonormé intelligent. Le vecteur $\vec{g}$ est $-g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, la vitesse initiale est $v_0\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$. Et le point initiale est $\begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix}$.

c. Intégrer l'équation et déterminer l'abscisse du point ou le projectile touche le sol.

Exercice 31. (2.7.22) Résoudre

a. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = |t|,$

b. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = |t|,$

c. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - x = te^{3t}$,

d. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = te^{i\omega t}$,

e. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} + x = 2 + \sin(t)$.

f. Quelle est la solution de l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = b(t)$ qui s'annule ainsi que sa dérivée pour $t = 0$?

Exercice 32. (2.7.23) Un ressort exerce une force de rappel proportionnelle à sa longueur.

a. Ecrire l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'un petit objet accroché au bout d'un ressort accroché au plafond. On suppose que sa vitesse initiale est verticale vers le bas, par exemple, et que l'air n'exerce pas de frottement.

b. Même problème si on suppose que, maintenant, que le point d'attache du ressort accomplit un mouvement oscillatoire $a(t) = a_0 \sin \omega t$. Ici a_0 est petit devant la longueur du ressort, et à l'instant initial, l'objet est au repos. La valeur $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ joue un rôle spécial. Lequel ?

c. Maintenant on accroche le ressort au plafond d'un ascenseur, et on suppose qu'au départ, il est fixe. Soit $v(t)$ la vitesse verticale de l'ascenseur, de sorte que maintenant on a l'équation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - m\frac{dv(t)}{dt}$$

On suppose que $v(t) = \gamma t$ pour $t \in [0, t_0]$ puis $v = \gamma t_0$ pour $t \in [t_0, t_1]$ et $v(t) = 0$ si $t > t_1$. Quand l'ascenseur s'arrête, quelle est l'amplitude du mouvement du ressort ?

Exercice 33. (2.7.24)

a. Soient $X_1(t), \dots X_n(t)$ n fonctions de classes C^1 définies sur un intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'en tout point t les $n$vecteurs $X_1(t), \dots X_n(t)$ sont linéairement indépendants. Démontrer qu'il existe une matrice $A(t)$ telle que les X_i soient une solution fondamentale de l'équation $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X(t)$.

b. Soient x_1, x_2 deux fonctions de classe C^2 sur l'intervalle I. On suppose qu'en tout point $w(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix} \neq 0$. Démontrer qu'il existe une équation différentielle $x'' + ax' + bx = 0$ dont x_1, x_2 est une base de l'ensemble des solutions.

c. Dire si les paires de fonctions suivants peuvent être solutions s'une équation différentielle d'ordre 2 (et le cas échéant sur quel intervalle ?). Expliciter a et b.

   I. $(t, t+1)$,

   II. (t, t^2)

   III. (e^t, t^2).

d.

e. Former une équation différentielle linéaire homogène dont on connaît un système fondamental de solutions.

   I. $(\sin(t), \cos(t))$,

   II. (e^t, te^t),

III. (t, t^2).

f.* (Dérivée de Schwarz) Soit f une fonction de la classe C^3 sur l'intervalle I. On suppose qu'en tout point sa dérivée f' ne s'annule pas. Trouver l'équation différentielle $x'' + bx = 0$ possédant deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1/x_2 = f$.

Exercice 34. (2.7.25) Trouver les solutions de l'équation *sans second membre* puis résoudre l'équation avec second membre :

$$t^2x'' - tx' = 3t^3$$

si $t > 0$.

Exercice 35. (2.7.26) Soit a une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $x'' + a(t)x = 0$ et deux solutions x_1, x_2.

a. Montrer que les 0 de x_1 sont des points isolés. On pourra raisonner par l'absurde et montrer que si t_0 est un point où $x(t_0) = 0$, est n'est pas un zéro isolé de la fonction x, alors $x'(t_0) = 0$.

b. Quelle est l'équation différentielle satisfait par le wronskien $w(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}$?

c. Montrer qu'entre deux zéros de x_1 il y a un zéro de x_2.

Exercice 36* (2.7.27) Soit a, b deux fonctions continues sur $I \subset \mathbb{R}$. On considère les équations différentielles $x'' + a(t)x = 0$, $x'' + b(t)x = 0$ et deux solutions x_1, x_2 de la première et la seconde équation. On suppose que $b > a$.

a. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par le wronskien $w(t) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{pmatrix}$?

b. Montrer qu'entre deux zéros de x_1 il y a un zéro de x_2.

c. En étudiant l'équation $x'' + \omega^2 x = 0$, montrer que toute solution de l'équation $x'' + tx = 0$ à une infinité de zéro sur $[1, +\infty[$. montrer qu'on peut ranger ces zéros en une suite croissante $t_1 < t_2 < t_3 \ldots$ telle que $t_n \to \infty$ et $t_{n+1} - t_n \to 0$

Exercice 37. (2.7.28) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A = I \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue. On suppose que pour tout t, la matrice $A(t)$ est antisymétrique.

a. Soit $X(t)$ une solution de $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X(t)$. Démontrer que la fonction $\|X(t)\|^2 = \langle X(t), X(t) \rangle$ est constante. Soit Y une autre solution. montrer que la fonction $\langle X(t), Y(t) \rangle$ reste constante.

b. Soient $(X_1, \ldots X_n)$ la solution fondamentale telle que $\{X_i(0)\}$ soit un repère orthonormé. Montrer que pour tout t, $(X_1, \ldots X_n)(t)$ est un repère orthonormé, autrement dit que la solution fondamentale est orthogonale.

c. En déduire que l'exponentielle d'une matrice antisymétrique est orthogonale.

d* Est-ce que si l'exponentielle d'une matrice A est orthogonale, A est forcement antisymétrique ?

Exercice 38* (2.7.29) Soit $\Phi(t)$ une solution fondamentale de l'équation différentielle linéaire $\frac{dX}{dt} = A(t)X(t)$. La matrice $R(t, s) = \Phi(t)\Phi(s)^{-1}$ s'appelle résolvante du système, ou monodromie de l'équation. Montrer que :

a. $R(t, s)$ ne dépend pas du choix de la solution fondamentale.

b. $R(t, u) = R(t, s)R(s, u)$, et en particulier $R(t, s) = R(s, t)^{-1}$.

c. $\dfrac{\partial R(t,u)}{\partial t} = A(t)R(t,u)$, $\dfrac{\partial R(t,u)}{\partial u} = -R(t,u)A(u)$.

Exercice 39. (2.7.30) Soit $X(t)$ une solution de l'équation différentielle linéaire $\frac{dX}{dt} = A(t)X(t)$, et $t \to P(t)$ une fonction à valeur dans les matrices inversibles. Trouver une équation différentielle linéaire dont $P(t)X(t)$ est solution.

Exercice 40. (2.7.31) En utilisant la méthode de la réduction de l'ordre, résoudre les équations dont on donne une solution.

a. $t > 0$, $t^2x'' - 7tx' + 15x = 0$, $x_1(t) = t^3$

b. $t > 0$, $t^2x'' - tx' + x = 0$, $x_1(t) = t$

c. $0 < t < 1$, $(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$: on cherchera une solution de la forme t^α.

Exercice 41. (2.7.32) En utilisant la méthode de la réduction de l'ordre, et la méthode de variation de la constante résoudre les équations avec second membre connaissant une solution de l'équation sans second membre.

a. $t > 0$, une solution de $t^2x'' - 2x = 0$ est $x_1(t) = t^2$. Résoudre $t^2x'' - 2x = 2t - 1$.

b. $t > 0$, une solution de $t^2x'' - tx' + x = 0$ est $x_1(t) = t$. Résoudre $t^2x'' - tx' + x = t^n$.

Exercice 42. (2.7.33) Equations d'Euler homogène

C'est une équation linéaire dont le terme de degré k est un monôme de la forme $a_k t^k$.

a. On considère l'équation $t^2x'' + atx' + bx = 0$. Chercher une solution sous la forme posant $x = t^\alpha$.

b.* Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. Démontrer qu'il existe un polynôme Q tel que si $Q(\alpha) = 0$ la fonction t^α satisfait l'équation différentielle $t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = 0$

c. Résoudre $x'' = \dfrac{2x}{t^2}$.

d. Résoudre $t^2x'' + 3tx' + x = 0$.

Exercice 43.* (2.7.34)

a. Résoudre l'équation $x'' - tx' + x = 0$ en séries entières.

b. Pour quelle valeur de α l'équation $(1-t^2)x'' - 2tx' + \alpha(\alpha+1)x = 0$ possède une solution polynomiale.

Exercice 44.* (2.7.35) Equations d'Euler non homogène.

C'est une équation linéaire qui se ramène à une équation à coefficients constants grâce à un changement de variables. On se place sur l'intervalle $t > 0$.

On fait le cas d'ordre 2.

On considère l'équation $(at+b)^2x'' + a_1(at+b)x' + a_2x = f(t)$.

On se place sur l'intervalle $t > \dfrac{-b}{a}$ et on pose $at + b = e^s$.

a. Vérifier que $\dfrac{dx}{dt} = ae^{-s}\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a^2e^{-2s}\left(\dfrac{d^2x}{ds^2} - \dfrac{dx}{ds}\right)$.

b. Montrer que la fonction $x(s)$ satisfait une équations différentielle linéaire à coefficients constants.

c. Intégrer l'équation $(t+1)^2x'' - 3(1+t)x' + 4x = (1+t)^3$.

Exercice 45. (Problème 2.7.1) Quasi-polynômes et équations différentielles linéaires à coefficients constant.

On veut donner une approche purement «algèbre linéaire» du théorème sur les équations différentielles à coefficients constants. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonction C^∞ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ Un quasi-polynôme est une fonction de la forme $f(t) = \sum_{i=1^k} p_i(t)e^{\lambda_i t}$ où les p_i sont des polynômes. Nous noterons $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$, le sous espace des quasi-polynômes et $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_0 e^{\lambda t} \subset \mathcal{F}$ le sous espace vectoriel des quasi-polynômes de la forme $p(t)e^{\lambda t}$. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients constant. On veut étudier l'équation différentielle sans second membre :

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0$$

Ou on cherche x dans $\mathcal{E}$, et on appelle E l'espace vectoriel des solutions.

On introduit l'application linéaire $D \in \operatorname{End} \mathcal{E}$

a. Montrer que $E = \ker(P(D))$.

b. Rappeler pourquoi, si P est le produit de deux polynôme A et B premiers entre eux alors $\ker(A(D)) \oplus \ker(B(D)) = \ker(P(D))$.

c. Dans $\mathbb{C}$, tout polynôme unitaire se décompose $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$, ou les λ_i sont les racines distinctes de P et les ν_i leur multiplicité.

d. Montrer que $\ker D^\nu$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $\nu - 1$

e. Montrer que $\ker(D - \lambda \mathrm{Id})^\nu$ est l'espace vectoriel des quasi-polynômes de la forme $p(t)e^{\lambda t}$, où p est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\nu - 1$.

f. En déduire que les fonctions $t^j e^{\lambda_i t}$, avec $0 \leqslant i \leqslant k$ et $0 \leqslant j \leqslant \nu_i$ forment une base de l'ensemble des solutions.

g. Démontrer que les fonctions de la forme $t^j e^{\lambda_i t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{N}$ forment une base de $\mathcal{F}$.

h. Soit $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$, et $Q = (X - \lambda)$, de sorte que P et Q sont premier entre eux.

On considère l'espace vectoriel $\ker PQ(D)$. En utilisant le fait que P et Q sont premier entre eux démontrer que pour tout quasi-polynôme ν de $\mathcal{F}_\lambda$, il existe un unique quasi polynôme de $\mathcal{F}_\mu$ tel que $P(D)u = \nu$.

En déduire que l'équation différentielle

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = t^{\nu-1}e^{\mu t}$$

admet une solution de la forme $p(t)e^{\mu t}$.

i. On, écrit $P = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{\nu_i}$. montrer que l'équation $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = t^{\nu-1}e^{\lambda_1 t}$ admet une solution de la forme $p(t)e^{\lambda_1 t}$, ou degré de p est inférieur ou égal à ν. On pourra se ramener à étudier une équation de la forme $x^{(\nu)} = p(t)$, ou p est un polynôme.

Exercice 46. (3.7.1) On considère une équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}.$$

On considère l'orbite $\mathcal{C}$ passant en un point (x_0, y_0) supposé non singulier.

a. A quelle condition la tangente en (x_0, y_0) est elle verticale ?

b. fait elle un angle α avec l'horizontale ?

c. A quelle condition ce point est il un point d'inflexion de $\mathcal{C}$?

Une idée pour résoudre ce problème : Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est une solution, exprimer que l'accélération $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} f(x(t),y(t)) \\ g(x(t),y(t)) \end{pmatrix}$ est proportionnelle à la vitesse.

Exercice 47. (3.7.2)

Soit $A = \begin{pmatrix} \ln(2) & -\frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} & \ln(2) \end{pmatrix}$.

a. Quelle est l'image d'un triangle (a,b,c) du plan par la valeur à l'instant 1 du flot de l'équation linéaire $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$?

b. Quelle est l'image Σ_θ de demi-droite D_θ passant à l'origine et faisant un angle θ avec l'axe des x par le flot de ce champ de vecteurs ?

Exercice 48. (3.7.3)

Soit X un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$, et f une fonction strictement positive.

a. Montrer que X et fX ont les mêmes orbites. *Indication :* Considérer le flot $\psi(u,x)$ du champ fX et chercher une fonction $\theta(t)$ telle que $\psi(\theta(t),x)$ soit le flot de X.

b. Réciproque ?

Exercice 49. (3.7.4)

Pour un TP de mat-appli. Ecrire un script permettant d'afficher le portrait de phase d'une équation différentielle du second ordre en dimension 1 ou du premier ordre dans l'espace des phases qui est de dimension 2.

Par exemple l'équation de Liénard

$$x'' - \mu(1-x^2)x' + x = 0$$

avec μ petit.

Exercice 50. (3.7.5)

En séparant les variables, intégrer

a. $\mathrm{tg}(x)\sin^2(y)dx + \cos^2(x)\mathrm{ctg}(y)dy = 0$,

b. $xy' - y = y^2$,

c. $xyy' = 1 - x^2$.

Exercice 51. (3.7.6)

Former une équation différentielle dont les solutions sont les courbes

a. $x^2 = \lambda(x^2 - y^2)$,

b. $y^2 + \frac{1}{x} = 2 + \lambda e^{-y^2/2}$

Exercice 52. (3.7.7)

On cherche les courbes C vérifiant la propriété suivante. Au point M, la normale à C en M coupe les deux axes $[Ox]$ et $[Oy]$ du demi plan $x > 0, y > 0$ en deux points A, B tels que M soit le milieu de $[A, B]$.

Exercice 53. (3.7.8) Trajectoire orthogonales.

On considère une famille de courbe dépendant d'un paramètre. On cherche une famille de courbe qui rencontre la première orthogonalement (à angle droit) en tout point.

a. Si la première famille est donnée par l'équation $y' = f(x,y)$, montrer qu'on peut définir la seconde par $\dfrac{-1}{y'} = f(x,y)$

b. Si elle est donnée par $f(x,y) = \lambda$, montrer que l'autre est obtenue en résolvant $\dfrac{\partial f}{\partial x}dy - \dfrac{\partial f}{\partial y}dx = 0$.

c. Trouver les trajectoires orthogonales à la famille d'ellipses $x^2 + 2y^2 = \lambda$.

d. Même question avec les hyperboles $xy = \lambda$.

e. Si la famille est donnée par $f(x,y,\lambda) = 0$, démontrer que la famille orthogonale s'obtient en résolvant $\dfrac{\partial f}{\partial x}dy - \dfrac{\partial f}{\partial y}dx = 0$ avec $f(x,y,\lambda) = 0$.

f. Traiter le cas des cercles $(x-a)^2 + y^2 = a^2$.

Exercice 54. (3.7.9)(Théorème de Clairaut)

Soit $\omega = a dx + b dy$ une forme différentielle définie sur un ouvert Ω supposé *convexe*. On suppose qu'elle est *fermée*, i.e., que $\dfrac{\partial a}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial x} = 0$.

a. Montrer que l'intégrale $F(x,y) = \displaystyle\int_C \omega$ ou C est un chemin joignant (x_0, y_0) à (x,y) ne dépend pas du chemin.

   Indication : Soient γ_1 et γ_2 deux chemins paramétrées $\gamma_i = [0,1] \to \Omega$ de classe C^1 joignant (x_0, y_0) à (x,y). On pose $\gamma_t = t\gamma_1 + (1-t)\gamma_0$; étudier $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{C_t} \omega$, où C_t est le chemin paramétré par γ_t.

b. Montrer que $dF = \omega$ (on pourra considérer des chemins parallèles aux axes).

c. Réciproquement si $F \in C^2$ et $dF = a dx + b dy$, montrer que $\dfrac{\partial a}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial x} = 0$.

Exercice 55. (3.7.10)

Passer en coordonnées polaires dans les équations suivantes pour les intégrer.

a. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2} - x}{y}$

b. $(x^2+y^2)dx - xy dy = 0$

c. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x(1-(x^2+y^2)) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y(1-(x^2+y^2)) \end{cases}$

Exercice 56. Repère non-galiléen.(selon Problème 3.7.1)

a. Soit $A(t)$ une matrice inversible dépendant de t. Exprimer la dérivée $(A^{-1})'$ en termes de A et sa dérivée.

b. Soit $\Omega = A^{-1}A'$. Exprimer $A^{-1}A''$ en termes de Ω et ces dérivées.

c. Soit maintenant $A(t)$ une matrice orthogonale dépendant de t. Montrer que $\Omega(t) = A^{-1}A'$ est une matrice antisymétrique.

d. Soit Ω une matrice 3×3 antisymétrique. Trouver un vecteur $\vec{\omega} \in \mathbb{E}^3$ dans l'espace euclidien tel que $\Omega \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ en termes des éléments matriciels de Ω.

Rappelons que le passage d'un système de coordonnées orthonormée à un autre dans un espace $\mathbb{R}^3$ affine est donnée par $\vec{r} = O^{-1}(\vec{R} - \vec{b})$ ou O est une matrice orthogonale, $\vec{R}$ un vecteur de position dans l'ancien système, $\vec{r}$ le vecteur de position dans le nouveau système et $\vec{b}$ est le vecteur de position de l'origine du nouveau système par rapport à l'ancien.

Supposons que l'ancien système est galiléen, alors la trajectoire d'un point matériel satisfait dans ce système l'équation

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{R} = \vec{F}.$$

Notons par $\vec{f} = O^{-1}\vec{F}$ le vecteur de la force dans le système non-galiléen et par $\vec{a} = O^{-1}\dfrac{d^2\vec{b}}{dt^2}$ le vecteur de l'accélération de l'origine d'un système par rapport à l'autre.

e. Exprimer l'accélération $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ dans le système non-galiléen en termes du vecteur $\vec{r}$, la vitesse angulaire $\vec{\omega}$, la force $\vec{f}$, accélération $\vec{a}$ et ces dérivées.

Exercice 57. (3.7.11) Donner un exemple de système stable, mais pas asymptotiquement stable en dimension 2.

Exercice 58. (3.7.12)

Trouver les points d'équilibre et discuter leur stabilité.

a. $\dfrac{dx}{dt} = -x(1-x)$,

b. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2$,

c. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x(x-1)(2x-1) \\ \dfrac{dy}{dt} = -2y \end{cases}$.

Exercice 59. (3.7.13)

Etudier les orbites du système :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y + x^3 \end{cases}$$

et comparer au système linéarisé.

Exercice 60. (3.7.14) Soit $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. On étudie l'équation différentielle $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -\nabla U$.

a. Quels sont les points d'équilibre de ce système ?

b. Démontrer que si $X(t) = (x(t), y(t))$ est une solution, la fonction U est décroissante le long des trajectoires.

On suppose que U est propre, c'est à dire que $\lim_{(x,y)\to\infty} U(x,y) = +\infty$.

c. Démontrer que la solution du problème de Cauchy $\dfrac{\partial X}{\partial t} = -\nabla U$, $X(0) = (x_0, y_0)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

d. On suppose que pour tous les points critique de U (les points où $\nabla U = 0$ la Hessienne $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ est non dégénérée. Discuter la stabilité des points critiques.

e. Etudier le cas particulier $U(x, y) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{y^2}{2}$ et esquisser le portrait de phase.

Exercice 61*. (Problème 3.7.2) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice dont toutes les valeurs propres $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ (complexes),ont une partie réelle strictement négative. On rappelle que le produit scalaire est donné par la formule $\langle X, Y\rangle = \Sigma_{i=1}^n x_i y_i$

a. En utilisant la forme générale des solutions de l'équation $\frac{dX}{dt} = AX$, démontrer que la fonction $\langle (\exp tA)x, (\exp tA)y\rangle$ est une somme de fonctions de la forme $p_{i,j} e^{(\lambda_i + \lambda_j)t}$

b. En déduire que pour l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \langle \exp tAx, \exp tAy\rangle dt$ est convergente et défini un nouveau produit scalaire $\langle u, v\rangle_n$ sur $\mathbb{R}^n$ défini positif. On note $q(x) = \langle x, x\rangle_n$ le carré scalaire, c'est le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

c. Soit $Y = Ax$ le champ de vecteur linéaire associé à A. Montrer que

$$Yq(x) = 2\langle x, Ax\rangle_n = \int_0^\infty \langle \exp tAx, A \exp tAx\rangle dt = 2\int_0^\infty \langle x(t), x'(t)\rangle dt = -\langle x, x\rangle.$$

d. En déduire qu'il existe un certain $\alpha > 0$ tel que $Yq(x) \leqslant -\alpha q(x)$ et que le long d'une orbite $q(x(t)) \leqslant e^{-\alpha t} q(x)$

e. Démontrer le cas général du Théorème de Stabilité en vous inspirant du cas particulier traité dans la démonstration du théorème 3.

Exercice 62. (3.7.15)

On considère l'équation différentielle $x'' + f(x) = 0$

a. Ecrire l'équation dans l'espace des phases en posant $y = x'$.

b. Soit U une primitive de f. Re-démontrer que $E = U + \dfrac{y^2}{2}$ est un intégrale première de cette équation

c. Dessiner côte à côte le graphe de la fonction U et quelques courbes $E = cte$ pour les exemples suivants.

I. $f(x) = x^{2n-1}$,

II. $f(x) = x - x^3$,

III. $f(x) = x - x^2$.

Dans chacun des cas, on cherchera les positions d'équilibre (points critiques) et on discutera leur stabilité. On décrira les orbites périodiques, homoclines et hétéroclines.

Exercice 63. (3.7.16)

On considère l'équation $x'' = -\nabla U(x)$, ou $U(x) = -\dfrac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$

a. Chercher le minimum d'énergie $E = \dfrac{1}{2} x'^2 + U(x)$ et montrer que celui ci est stable.

b. Pour quelles valeurs de E le mouvement est il périodique ?

c. Calculer alors sa période.

Exercice 64. (Problème 3.7.3) Champ central et problème de Kepler. [1]

On se place dans $\mathbb{R}^3$, et on se donne un champ de forces central. Conformément à la tradition nous noterons $\vec{r}$ la position d'un point soumis à la force en question, et $r = \|\vec{r}\|$ sa norme euclidienne.

En tout point la force $\vec{F}$ se dirige vers l'origine, autrement dit il existe une fonction $\vec{F}(\vec{r}) = \phi(\vec{x})\vec{r}$, ou ϕ est peut-être positif (si l'objet est repoussé du centre), peut être négatif (il y est attiré). On étudie l'équation de Newton $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r})$.

a. Soit $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ la vitesse. Montrer que $m\vec{v} \wedge \vec{r} = \vec{M}$ reste constant au cours du temps. On note M sa longueur.

b. Montrer que au cours du temps le point reste dans le plan Π perpendiculaire au vecteur $\vec{M}$ passant à l'origine.

Ainsi le mouvement reste dans un plan au cours du temps et ce plan ayant un point privilégié, il est tentant de passer en coordonnées polaires dans le plan Π : $\vec{r}(t) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

On suppose maintenant de plus que la valeur absolue de la force ne dépend que de la distance à l'origine, de sorte que $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\vec{r} = -\nabla U(r)$.

c. Calculer $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$, en coordonnées polaires et montrer que $mr^2\dfrac{d\theta}{dt} = M$ reste constant au cours du temps (utiliser a.). C'est *la loi des aires.*

d. L'énergie cinétique de l'objet est $\dfrac{1}{2}m\left\langle \dfrac{d\vec{r}}{dt}, \dfrac{d\vec{r}}{dt} \right\rangle$ combien vaut elle en coordonnées polaires ?

e. Montrer que l'énergie totale est

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{M^2}{2mr^2} + U(r).$$

Ce qui ramène à l'étude d'un système à un degré de liberté dont l'énergie potentielle serait

$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{M^2}{2mr^2} + U(r)$$

f. On suppose maintenant que le potentiel U est le potentiel de Kepler $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$. Dessiner côte à côte le potentiel efficace $\dfrac{M^2}{2mr^2} - \dfrac{\alpha}{r}$ et les trajectoires dans l'espace des phases $r, \dfrac{dr}{dt}$. En déduire que si $E > 0$ le mouvement s'en va à l'infini, alors que si $E < 0$ l'orbite est périodique.

g. On a $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{M}{mr^2}$ et $\dfrac{dr}{dt} = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(E + \dfrac{\alpha}{r}\right) - \dfrac{M^2}{mr^2}}$. En déduire que

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{M}{mr^2}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right) - \frac{M^2}{mr^2}},$$

et intégrer grâce au changement de variables $x = \dfrac{1}{r}$.

h. Montrer que les trajectoires sont de la forme $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, avec $p = \dfrac{M^2}{m\alpha}$, $e = \sqrt{1 + \dfrac{2EM^2}{m\alpha^2}}$. Ce sont des coniques d'excentricité e, et on retrouve bien les résultats du f.

1. Pour plus de renseignements, voir Landau et Lifchitz, mécanique ch.3.

i. Dans le cas du potentiel de Kepler, montrer que le vecteur de Runge-Lenz

$$\vec{A} = \vec{v} \wedge \vec{M} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$$

reste constant.

Exercice 65. (4.4.1)
Donner un exemple ou il y a égalité dans l'inégalité de Grönwall.

Exercice 66. (4.4.2)

a. On considère l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = t + \sin x$. Soit x_0 la solution telle que $x_0(0) = 0$, et x_1 celle pour laquelle $x_1(0) = 0,1$ estimer le maximum de $|x_1(t) - x_0(t)|$ sur l'intervalle $[0, T]$. Pour quelle t l'erreur obtenue en remplaçant x_1 par x_0 est elle inférieure à 1% ?

b. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = tx. \end{cases}$$

avec comme condition initiale, $x(0) = 1$, $y(0) = 0$. Soit $x_\varepsilon(t) = 1 + t + t^2/2$, $y_\varepsilon(t) = t^2/2$. Trouver un majorant de l'erreur commise sur l'intervalle $[0, 0.1]$ si on remplace la solution par la solution approchée.

Exercice 67. (4.4.3)

a. Soient ψ et y deux fonctions continues définie sur $[t_0, t_1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$ et c une constante telles que $y(t) \leqslant c + \int_{t_0}^{t} \psi(u)y(u)du$. En posant $F(t) = c + \int_{t_0}^{t} \psi(u)y(u)du$ et en étudiant la fonction de classe C^1 : $G(t) = F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} \psi(u)du\right)$ montrer que $y(t) \leqslant c\int_{t_0}^{t} \psi(u)du$.

b. Soit x une solution de $x'' + q(t)x = 0$, où $q : [0, +\infty[\to \mathbb{R}_{>0}$ est une fonction croissante strictement positive (et donc minorée par $q(0)$). Montrer que $x'^2 + q(t)x^2 = K + \int_0^t q'(s)x^2(s)ds$. En déduire que x est bornée.

Exercice 68. (4.4.4)

a. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Ecrire le schéma d'Euler pour l'équation $\frac{dx}{dt} = f(t)$, $x(0) = x_0$. Que constate-t-on ? Et si on fait la méthode de Picard ?

b. Mêmes questions avec l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = x$, $x(0) = x_0$.

Exercice 69. (4.4.5 Numérique)
Ecrire la méthode d'Euler pour trouver une solution approchée au problème de Cauchy, dans les exemples suivants. On subdivise l'intervalle en 10 parties égales. On pourra faire le calcul à la main ou avec son logiciel préféré.

a. $x' = x + t$, $x(0) = 1$, pas $h = 0.1$, on subdivise en 10 intervalles. Combien vaut $x(1)$? et la vraie solution ?

b. $x' = \dfrac{x}{1+t}$, $x(0) = 2$. Combien vaut $x(1)$? Et la vraie solution ?

Exercice 70. (4.4.6 Numérique)

a. S'inspirer de l'annexe A pour écrire le schéma d'Euler d'une équation différentielle, par exemple l'équation des lynx et des lapins.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1-y) \\ y(1-x) \end{pmatrix}$$

définie sur l'ouvert $2 > x > 0$, $2 > y > 0$.

b. Perturber un peu cette équation avec un petit terme comme $\begin{pmatrix} \left(\frac{(x-1)}{2}\right)^2 \sin y \\ \left(\frac{(y-1)}{2}\right)^2 \cos y \end{pmatrix}$ pour voir le résultat.

Exercice 71. (4.4.7) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue, soit $[t_0, t_1] \subset I$ un intervalle compact. Soit $k = \max_{t \in [t_0,t_1]} \|A\|$. On considère l'equation linéaire $\dfrac{dx}{dt} = A(t)x$, $x(t_0) = x_0$. On considère l'opérateur de Picard qui défini une automorphisme affine continue de $C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ par la formule $\Phi_{x_0}(t)x = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} A(u)x(u)du$.

a. Montrer que $\|\Phi(t)x - \Phi(t)y\| \leqslant k(t - t_0)$

b. Puis que $\|\Phi^n(t)x - \Phi^n(t)y\| \leqslant k^n \dfrac{(t-t_0)^n}{n!}$

c. En déduire qu'il existe une puissance Φ^{n_0} de Φ qui soit $1/2$ contractante, et que la solution au problème de Cauchy est bien définie et unique sur tout l'intervalle I. On vérifiera qu'une fonction est un point fixe de Φ si et seulement si c'est un point fixe de Φ^{n_0}.

d. Même question si on ne suppose plus l'équation différentielle linéaire, mais seulement globalement k lipschitzienne ; c'est à dire $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\|f(t, x) - f(t, y)\| \leqslant k|x - y|$.

Exercice 72. (4.4.8) Sortie de tout compact.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Soit $K \subset \Omega$ un compact, et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un T (dépendant de ε et K) tel que pour toute donnée initiale x_0 dans K, il existe une solution ε approchée de l'équation différentielle $\dfrac{dx}{dt} = f(x)$ telle que $x(0) = x_0$ définie sur l'intervalle $[0, T]$. On suppose de plus que f est localement lipschitzienne. Démontrer que si $x_0 \in K$, et $x : [0, T[\to \Omega$ est la solution maximale du problème de Cauchy, soit $t = +\infty$, soit T est fini et il existe un instant t_1 tel que si $t > t_1$ $x(t) \notin K$. Autrement dit $x(t)$ sort de K et n'y revient jamais.

Exercice 73. (4.4.9) Convergence uniforme.

Soit X un ensemble et $E, \|.\|$ un espace vectoriel normé complet (par exemple de dimension finie). L'ensemble des fonctions bornées $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace vectoriel. Si $f \in \mathcal{F}_b(X, E)$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|$

a. Montrer, que muni de cette norme, $\mathcal{F}_b(X, E)$ est un espace complet.

b. On suppose de plus que X est un espace topologique (par exemple un espace métrique) et on fixe un point $x_0 \in X$. Montrer que l'ensemble des fonctions discontinues en x_0 est un ouvert, et que l'ensemble des fonctions continues en x_0 est un fermé.

c. Montrer que l'ensemble des fonctions continues bornées, muni de la norme $\|f\|_\infty$ est un espace complet.

d. Soient f_n une suite de fonctions continues et bornées sur X qui converge uniformément vers une fonction. Montrer que cette fonctions est continue et bornée.

Exercice 74. (4.4.10) Dépendance par rapport à la condition initiale.

On veut étudier le comportement d'un système conservatif a un degré de liberté au voisinage de sa position d'équilibre. Il satisfait l'équation différentielle

$$x'' = -f'(x).$$

On suppose que f est de classe C^n, atteint un minimum non dégénéré en 0, et qu'on a un développement limité

$$f'(x) = \omega^2 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + o(x_n)$$

On sait que, si $x(t, h)$ est la valeur à l'instant t de la solution de l'équation telle que $x(0, h) = h, x'(0, h) = 0$, alors x est de classe C^{n+1} par rapport à h et, comme $x(t) = 0$ on a

$$x(t, h) = x_1(t)h + \cdots + x_n(t)\frac{h^n}{n!} + h^n\eta(t, h),$$

où les fonctions x_i sont de classe C^n ainsi que η. Pour h fixé, et pour $k = 1$ ou 2.

$$x^{(k)}(t, h) = x_1^{(k)}(t)h + \cdots + x_n^{()k)}(t)\frac{h^n}{n!} + h^n\eta(t^k, h).$$

a. Quelle équation différentielle satisfont x_1, x_2 ? (on précisera les conditions initiales).

b. Résoudre ces équations.

c. Montrer qu'en général x_k satisfait une équation différentielle linéaire dont le second membre est un polynôme en $x_1, \ldots .x_{k-1}$, et en déduire que x_k est un quasi-polynôme.