

**Exercice 1.** Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . Considérons l'anneau  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , et notons  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$  le sous-ensemble des éléments inversibles pour la loi de la multiplication sur  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

- Montrer que  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$  est un groupe.
- Soit  $m \in \mathbb{Z}$  un autre entier. Montrer que  $\gcd(m, n) = 1$  si et seulement s'il existe deux entiers  $u, v \in \mathbb{Z}$  tels que  $um + vn = 1$  et en déduire que la classe  $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  appartient à  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$  si et seulement si  $\gcd(m, n) = 1$ .

**Exercice 2.** Le but de cet exercice est de montrer le théorème des restes chinois suivant : Soient  $m, n$  deux entiers, et  $\phi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  le morphisme de réduction défini par  $\phi : x + mn\mathbb{Z} \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$ . Si  $(m, n) = 1$ , alors  $\phi$  est un isomorphisme d'anneaux.

- Montrer que  $\phi$  est un homomorphisme d'anneaux.
- Supposons que  $(m, n) = 1$ . Montrer que  $\phi$  est injectif, et en déduire que  $\phi$  est un isomorphisme d'anneaux, et qu'il induit donc un isomorphisme de groupes  $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ .
- Soient  $u, v \in \mathbb{Z}$  satisfont  $um + vn = 1$  et soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  des entiers arbitraires. Calculer l'image de  $aum + bvn$  dans  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .
- Trouver un entier  $x$  qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 5 \pmod{7} \end{cases}$$

**Exercice 3.** Dans cet exercice, on donne des applications du théorème des restes chinois.

- Soit  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  avec la factorisation primaire  $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ , où  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$  et  $p_i$  sont des nombres premiers avec  $p_i \neq p_j$  si  $i \neq j$ . Montrer qu'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}.$$

- Calculer l'ordre du groupe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ .
- Montrer que tout groupe abélien d'ordre 24 est isomorphe à l'un des trois groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Pourquoi ces trois groupes ne sont-ils pas isomorphes ?

- Combien y-a-il de classes d'isomorphisme des groupes abéliens d'ordre  $10^4$  ?

**Exercice 4.** Soient  $p \geq 3$  un nombre premier, et  $e \geq 1$  un entier. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe  $G = (\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$  est cyclique d'ordre  $(p-1)p^{e-1}$ .

- Soit  $a \equiv b \pmod{p^e}$ . Montrer que  $a^p \equiv b^p \pmod{p^{e+1}}$ .
- Montrer que  $(1 + ap)^{p^{e-2}} \equiv 1 + ap^{e-1} \pmod{p^e}$ .
- On fixe un  $a \in \mathbb{Z}$  tel que  $p \nmid a$ . Trouver l'ordre de  $1 + ap$  dans le groupe  $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$ .

- d. On notera par  $H \in G$  le sous-groupe cyclique engendré par  $1 + ap$ . Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes  $G/H \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ .
- e. Soit  $x \in G$  tel que son image dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  soit un générateur. Montrer que  $x(1 + ap)$  est un générateur de  $G$ .

**Exercice 5.** Soit  $e \geq 2$  un entier. On pose  $H = \{x \in (\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z})^\times \mid x \equiv 1 \pmod{4}\}$ .

- a. Montrer que  $5^{2^{e-3}} \equiv 1 + 2^{e-1} \pmod{[2^e]}$ .
- b. Montrer que  $H$  est un groupe cyclique d'ordre  $2^{e-2}$  et  $5 \in H$  est un générateur de  $H$ .
- c. Montrer que on a  $(\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z})^\times = H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

**Exercice 6\*** Soit  $G$  un groupe fini. Une *représentation* de  $G$  est un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}(V)$ , où  $V$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  de dimension finie.

On dit qu'un sous-espace  $W \subset V$  est invariant si il est invariant par rapport à tout les applications  $\rho(g)$  où  $g \in G$ .

- a. Montrer que pour tout espace invariant  $W$  il existe un sous-espace invariant supplémentaire  $W'$ .
- b. Montrer que si  $G$  est abélien il existe un sous-espace de  $V$  invariant de dimension 1.
- c. Montrer que tout représentation de  $G$  est isomorphe à une somme de représentations de dimension 1.

**Exercice 7.** Expliciter tous les caractères pour les groupes

- a.  $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$
- b.  $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ .
- c. Expliciter tous les caractères d'ordre 2 pour le groupe  $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ .

**Exercice 8.** Soient  $G$  un groupe abélien fini et  $\hat{G}$  son groupe de caractères. Notons  $\mathbb{C}^G$  l'espace des fonctions complexes sur  $G$ . Pour  $f \in \mathbb{C}^G$ , on définit sa transformée de Fourier  $\hat{f} \in \mathbb{C}^{\hat{G}}$  par

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} f(x).$$

- a. Montrer que pour toute  $f \in \mathbb{C}^G$ , on a

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi) \chi(x).$$

- b. Montrer qu'on a une égalité

$$\sum_{x \in G} |f(x)|^2 = |G| \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2$$

- c. Soit  $H \in G$  un sous-groupe de  $G$  et  $H^\perp \subset \hat{G}$  est défini comme  $\{\chi \in \hat{G} \mid \chi(x) = 1 \text{ pour tout } x \in H\}$ . Montrer que pour tout  $f \in \mathbb{C}^G$

$$\sum_{x \in H} f(x) = |H| \sum_{\chi \in H^\perp} \hat{f}(\chi)$$

- d. Montrer que  $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$  et  $\widehat{f * g} = |G| \hat{f} \hat{g}$ . Ici  $f * g(x) = \sum_{y, z \mid y+z=x} f(y)g(z)$  et la convolution des fonctions  $f$  et  $g$ .

**Exercice 9.**

a. Montrer que

$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

b. Caractériser les nombres premiers  $p$  modulo lesquels  $-1$  est un carré.

c. Caractériser les nombres premiers  $p$  modulo lesquels  $2$  est un carré.

**Exercice 10.** Exprimer la condition que  $a$  premier avec  $p$  est un carré modulo  $p^k$ , en termes de symbole de Legendre.

**Exercice 11. Sommes de Gauss.** Soit  $p$  un nombre premier. On pose  $\zeta$  une racine primitive  $p$ -ème de l'unité, par exemple  $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$ . Soit  $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  un caractère. On étend  $\chi$  en une fonction sur  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  en posant  $\chi(0) = 0$ . Pour  $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ , on pose

$$\tau_a(\chi) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \chi(x) \zeta^{ax}$$

et  $\tau(\chi) = \tau_1(\chi)$ . On appelle les  $\tau_a(\chi)$  des *sommes de Gauss* de  $\chi$ .

a. Montrer que  $\tau_a(\chi) = \bar{\chi}(a)\tau(\chi)$  pour tout  $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

b. Calculer  $\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}$  et en déduire la valeur absolue  $|\tau(\chi)|$ .

c. Montrer que si  $\chi(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$  est le symbole de Legendre, alors on a  $\tau(\chi)^2 = \chi(-1)p$  et en déduire que

$$\tau(\chi) = \pm \begin{cases} \sqrt{p} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{4}, \\ i\sqrt{p} & \text{si } p \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

d. Soit  $q$  un nombre premier différent de  $p$ . Calculer  $\tau(\chi)^q \pmod{q}$  avec la formule de binôme. En déduire la loi de réciprocité :

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = 1$$

e. Calculer  $\left(\frac{79}{101}\right)$ .

**Exercice 12. (Somme de Gauss quartique).** Soit  $p$  un nombre premier avec  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , et soit  $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  un caractère d'ordre 4. On pose

$$J = \sum_{t=1}^{p-2} \left(\frac{1+t}{p}\right) \chi(t).$$

a. Montrer que

$$\tau(\chi)^2 = J\tau(\chi^2)$$

.

b. Montrer que  $J$  prend valeurs dans les nombres Gaussien  $\mathbb{Z}[i]$  et que  $J\bar{J} = p$ . En déduire que tout nombre premier  $p$  avec  $p \equiv 1 \pmod{4}$  est une somme de deux carrés.

c. Montrer que tout nombre premier  $p$  avec  $p \equiv 3 \pmod{4}$  n'est pas une somme de deux carrés.

**Exercice 13.**

a. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^s}$$

converge pour tout  $s \in \mathbb{R}_{>1}$ .

b. Montrer que pour tout  $x > 0$  on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} < \frac{\pi}{2x}$$

c. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m^4} < \frac{\pi^3}{12}$$

**Exercice 14. (Séries d'Eisenstein).** Soient  $\tau \in \mathbb{C}$  avec  $\Im \tau > 0$ , et  $s \in \mathbb{R}_{>0}$ .

a. Montrer que la série d'Eisenstein

$$E(s, \tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{|m + n\tau|^{2s}}$$

converge absolument lorsque  $s > 1$ .

b. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$  la série d'Eisenstein

$$E_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}}$$

définit bien une fonction holomorphe sur le demi-plan supérieur  $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$

c. Soit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  une matrice aux éléments entiers et déterminant 1. Calculer  $E\left(s, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$  et  $E_{2k}\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)$ .

**Exercice 15.** Considérons la fonction

$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - n)^2}$$

a. Montrer que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C}$ .

b. Montrer que  $f$  est bornée.

c. Calculer  $\lim_{\Im z \rightarrow \infty} f(z)$ .

d. En déduire que  $f = 0$ .

e. Montrer que

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

f. Montrer que

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

**Exercice 16.** (*Fonction  $\wp$  de Weierstrass*). Considérons la fonction

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \frac{1}{(z + m + n\tau)^2} - \frac{1}{(m + n\tau)^2}$$

- Montrer que la série est convergente et que  $\wp$  est une fonction holomorphe en dehors de l'ensemble  $\{m + n\tau | m, n \in \mathbb{Z}\}$ .
- Calculer  $\wp(z + m + n\tau)$ .

**Exercice 17.** Soit  $C$  l'ensemble des fonctions complexes définies sur  $\mathbb{N}^*$ . Pour  $f, g \in C$  on pose

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{d_1, d_2 | d_1 d_2 = n} f(d_1)g(d_2)$$

*convolution multiplicative* de  $f$  et  $g$ .

- Montrer que la convolution est commutative et associative.
- Trouver une fonction  $\varepsilon \in C$  telle que  $f \star \varepsilon = f$ .
- Décrire toutes fonctions  $f \in C$  inversibles par rapport à la convolution.
- Montrer que l'espace de fonctions multiplicatives est fermé par rapport à la convolution.
- Soit  $\mu \in C$  la fonction telle que  $\mu(n) = (-1)^r$  si  $n = p_1 \cdots p_r$  est un produit de  $r$  nombres premiers distincts, et  $\mu(n) = 0$  sinon. On appelle  $\mu$  la *fonction de Möbius*. Calculer  $\mu \star 1$ . En déduire l'inverse de la fonction  $\mu$  par rapport à la convolution.
- Soit  $\varphi \in C$  la fonction définie par  $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ . On appelle  $\varphi$  l'*indicatrice d'Euler*. Calculer  $\sum_{d|n} \varphi(n)$ .
- Let  $g \in C$ . Trouver la fonction  $f \in C$  telle que  $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$ .

**Exercice 18.** On dit que  $f \in C$  est à *croissance polynomiale*, s'il existe un entier  $k$  tel que  $f(n) = O(n^k)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On notera par  $C' \subset C$  l'espace de fonctions de croissance polynomiale.

Pour  $f \in C'$  on pose

$$L(s, f) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}.$$

- Montrer que  $C'$  est fermé par rapport à la convolution.
- Montrer que  $L(s, f)$  est une fonction holomorphe pour  $\Re(s)$  assez grand.
- Exprimer  $L(s, f \star g)$  en termes de  $L(s, f)$  et  $L(s, g)$ .
- Calculer  $L(s, \mu)$  et  $L(s, \varphi)$  en termes de  $\zeta(s) = L(s, 1)$ , où  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler et  $\mu$  - la fonction de Möbius.

**Exercice 19.** La *fonction de Liouville*  $\lambda \in C'$  est une fonction strictement multiplicative définie par  $\lambda(p) = -1$  pour tout  $p$  premiers.

- Calculer  $\sum_{d|n} \lambda(d)$ .
- Exprimer  $L(s, \lambda)$  en termes de la fonction zêta et comme un produit infini.

**Exercice 20.** Soit  $k \in \mathbb{N}$  un nombre naturel et soit  $\sigma_k(n)$  la somme de  $k$ -èmes puissances de diviseurs de  $n$

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Exprimer la série de Dirichlet  $L(s, \sigma_k)$  en termes de la fonction zêta.

**Exercice 21.**

a. Exprimer la somme

$$\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{N}^2 \\ (m,n)=1}} \frac{1}{m^2 n^2}$$

en termes de la fonction zêta.

b. La même question pour la somme

$$\sum_{\substack{m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^k \\ (m_1, \dots, m_k)=1}} \frac{1}{m_1^{s_1} \dots m_r^{s_r}}$$

**Exercice 22.**Soit  $J_k(n)$  est le nombre de  $k$ -uplets d'entiers positifs  $n_1, \dots, n_k$  inférieurs à  $n$  tels que  $(n_1, \dots, n_k, n) = 1$ .a. Exprimer  $J_k(n)$  en termes de diviseurs premiers de  $n$ .b. Calculer  $\sum_{d|n} J_k(n)$ .c. Montrer que  $J_k(n)$  est multiplicative.d. Calculer la série de Dirichlet  $L(s, J_k)$ .**Exercice 23.** La fonction  $\Lambda$  de von Mangoldt est définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour une fonction  $f$  strictement multiplicative

$$\frac{L(s, f)'}{L(s, f)} = -L(s, \Lambda f).$$

**Exercice 24.** Les nombres de Bernoulli  $B_k$  sont défini par le développement

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

a. Calculer  $B_0, B_1, B_2, B_4$  et  $B_k$  pour  $k > 1$  impaires.

b. Trouver le développement en série de Taylor de la fonction.

$$f(z) = \pi z \cot \pi z.$$

c. Exprimer  $\zeta(2k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  en termes de nombres de Bernoulli.d\* Utilisant l'équation fonctionnelle  $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$  où  $\zeta^*(s) = \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s)$  exprimer  $\zeta(-k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  en termes de nombres de Bernoulli.e. Exprimer  $S_m(n) = \sum_{i=0}^n i^m$  en termes de nombres de Bernoulli. *Indication* : Utiliser la formule d'Euler-Maclaurin :

$$\frac{1}{e^{\frac{\partial}{\partial x}} - 1} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(z),$$

où  $f^{(-1)}(z) := \int_0^z f(t) dt$ .

**Exercice 25.**

a. Trouver le domaine de divergence simple de la série

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

b. Exprimer  $\eta(s)$  en termes de la fonction  $\zeta$ .

c. Trouver le résidu  $\operatorname{Res}_{s=1} \zeta(s)$ .

**Exercice 26.** Trouver la série de Taylor pour la série d'Eisenstein

$$E_{2k}(q) = \sum_{m,n \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}},$$

où  $q = e^{2\pi i\tau}$ .

**Exercice 27.** Trouver le résidu  $\operatorname{Res}_{s=1} L(s, \chi_0)$ , où  $\chi_0$  est le caractère trivial de Dirichlet modulo  $N$ .

**Exercice 28.** Trouver les limites

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\varphi(N)}{N} \text{ et } \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\varphi(N)}{N}$$

où  $\varphi$  est l'indicatrice d'Euler.

**Exercice 29.** Calculer l'intégrale  $\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2} dx$ , où  $\{x\}$  est la partie fractionnelle de  $x$ . Exprimer le résultat en termes de la constante d'Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \approx 0.5772$$

**Exercice 30.** Trouver les produits infinis

a.  $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ .

b.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^n)^{\mu(n)/n}$ .

c.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2^n})$ .

d\*  $z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}$ ,

e\* Trouver la série de Taylor de  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$ .

Reponses :

2.  $c : (a,b)$ ;  $d : 26$ .
3.  $b : \phi(n) = n \prod_{p|n} (1 - p^{-1})$ ,  $c$ . Le nombre d'éléments d'ordre 2 est 2,4 et 8 respectivement,  $d : 25$ .
4.  $c : p^{e-1}$ .
7.  $a : (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,1,-1,-1), (1,-1,-1,1)$ .  $b : (1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \zeta^{5k}, \zeta^{4k}, \zeta^{3k})$  où  $k = 0, \dots, 5$  et  $\zeta = \exp \pi i/3$ ,  $c : \chi(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}}$  si  $p \neq 2$ ,  $\chi_1(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}}$ ,  $\chi_2(x) = (-1)^{\frac{x^2-1}{8}}$ ,  $\chi_3 = \chi_1 \chi_2$  si  $p = 2$ .
9.  $b : \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ ,  $c : \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 & \text{if } p \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
10.  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$  si  $p \neq 2$ ;  $a \equiv 1 \pmod{4}$  si  $p = 2$ ,  $k = 2$ ;  $a \equiv 1 \pmod{8}$  si  $p = 2$ ,  $k > 2$ .
11.  $b : p, \sqrt{p}$ ,  $e : 1$ .
14.  $c : (c\tau + d)^{-2s} E(s, \tau)$ ,  $(c\tau + d)^{-2k} E_{2k}(\tau)$ .
15.  $c : 0$ .
16.  $b : \wp(z)$ .