Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Considérons l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et notons $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ le sous-ensemble des éléments inversibles pour la loi de la multiplication sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

a. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ est un groupe.

b. Soit $m \in \mathbb{Z}$ un autre entier. Montrer que $\gcd(m, n) = 1$ si et seulement s'il existe deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $um + vn = 1$ et en déduire que la classe $\bar{m} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ appartient à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^\times$ si et seulement si $\gcd(m, n) = 1$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer le théorème des restes chinois suivant : Soient m, n deux entiers, et $\phi : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ le morphisme de réduction défini par $\phi : x + mn\mathbb{Z} \mapsto (x + m\mathbb{Z}, x + n\mathbb{Z})$. Si $(m, n) = 1$, alors ϕ est un isomorphisme d'anneaux.

a. Montrer que ϕ est un homomorphisme d'anneaux.

b. Supposons que $(m, n) = 1$. Montrer que ϕ est injectif, et en déduire que ϕ est un isomorphisme d'anneaux, et qu'il induit donc un isomorphisme de groupes $(\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

c. Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ satisfont $um + vn = 1$ et soient $a, b \in \mathbb{Z}$ des entiers arbitraires. Calculer l'image de $aum + bvn$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

d. Trouver un entier x qui vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x \equiv 2 \mod 3 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 5 \mod 7 \end{cases}$$

Exercice 3. Dans cet exercice, on donne des applications du théorème des restes chinois.

a. Soit $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ avec la factorisation primaire $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$, où $a_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ et p_i sont des nombres premiers avec $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Montrer qu'on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{a_i}\mathbb{Z}.$$

b. Calculer l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

c. Montrer que tout groupe abélien d'ordre 24 est isomorphe à l'un des trois groupes suivants :

$$\mathbb{Z}/24\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

Pourquoi ces trois groupes ne sont-ils pas isomorphes ?

d. Combien y-a-il de classes d'isomorphisme des groupes abéliens d'ordre 10^4 ?

Exercice 4. Soient $p \geqslant 3$ un nombre premier, et $e \geqslant 1$ un entier. Le but de cet exercice est de montrer que le groupe $G = (\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre $(p-1)p^{e-1}$.

a. Soit $a \equiv b \mod p^e$. Montrer que $a^p \equiv b^p \mod p^{e+1}$.

b. Montrer que $(1 + ap)^{p^{e-2}} \equiv 1 + ap^{e-1} \mod p^e$.

c. On fixe un $a \in \mathbb{Z}$ tel que $p \nmid a$. Trouver l'ordre de $1 + ap$ dans le groupe $(\mathbb{Z}/p^e\mathbb{Z})^\times$.

d. On notera par $H \in G$ le sous-groupe cyclique engendré par $1+ap$. Montrer qu'on a un isomorphisme de groupes $G/H \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$.

e. Soit $x \in G$ tel que son image dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ soit un générateur. Montrer que $x(1+ap)$ est un générateur de G.

Exercice 5. Soit $e \geqslant 2$ un entier. On pose $H = \{x \in (\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z})^\times | x \equiv 1 \mod 4\}$.

a. Montrer que $5^{2^{e-3}} \equiv 1 + 2^{e-1} \mod [2^e]$.

b. Montrer que H est un groupe cyclique d'ordre 2^{e-2} et $5 \in H$ est un générateur de H.

c. Montrer que on a $(\mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z})^\times = H \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6*. Soit G un groupe fini. Une *représentation* de G est un homomorphisme $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$, où V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie.

On dit qu'un sous-espace $W \subset V$ est invariant si il est invariant par rapport à tout les applications $\rho(g)$ où $g \in G$.

a. Montrer que pour tout espace invariant W il existe un sous-espace invariant supplémentaire W'.

b. Montrer que si G est abélien il existe un sous-espace de V invariant de dimension 1.

c. Montrer que tout représentation de G est isomorphe à une somme de représentations de dimension 1.

Exercice 7. Expliciter tous les caractères pour les groupes

a. $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$

b. $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$.

c. Expliciter tous les caractères d'ordre 2 pour le groupe $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$.

Exercice 8. Soient G un groupe abélien fini et $\hat{G}$ son groupe de caractères. Notons $\mathbb{C}^G$ l'espace des fonctions complexes sur G. Pour $f \in \mathbb{C}^G$, on définit sa transformée de Fourier $\hat{f} \in \mathbb{C}^{\hat{G}}$ par

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi(x)} f(x).$$

a. Montrer que pour toute $f \in \mathbb{C}^G$, on a

$$f(x) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi(x).$$

b. Montrer qu'on a une égalité

$$\sum_{x \in G} |f(x)|^2 = |G| \sum_{\chi \in \hat{G}} |\hat{f}(\chi)|^2$$

c. Soit $H \in G$ un sous-groupe de G et $H^\perp \subset \hat{G}$ est défini comme $\{\chi \in \hat{G} | \chi(x) = 1 \text{ pour tout } x \in H\}$. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{C}^G$

$$\sum_{x \in H} f(x) = |H| \sum_{\chi \in H^\perp} \hat{f}(\chi)$$

.

d. Montrer que $\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$ et $\widehat{f * g} = |G|\hat{f}\hat{g}$. Ici $f * g(x) = \sum_{y,z | y+z=x} f(y)g(z)$ et la convolution des fonctions f et g.

Exercice 9.

a. Montrer que
$$\left(\frac{a}{p}\right) = a^{\frac{p-1}{2}} \mod p$$

b. Caractériser les nombres premiers p modulo lesquels -1 est un carré.

c. Caractériser les nombres premiers p modulo lesquels 2 est un carré.

Exercice 10. Exprimer la condition que a premier avec p est un carré modulo p^k, en termes de symbole de Legendre.

Exercice 11. *Sommes de Gauss.* Soit p un nombre premier. On pose ζ une racine primitive p-ème de l'unité, par exemple $\zeta = \exp(\frac{2\pi i}{p})$. Soit $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère. On étend χ en une fonction sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ en posant $\chi(0) = 0$. Pour $a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$, on pose
$$\tau_a(\chi) = \sum_{x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times} \chi(x)\zeta^{ax}$$
et $\tau(\chi) = \tau_1(\chi)$. On appelle les $\tau_a(\chi)$ des *sommes de Gauss* de χ.

a. Montrer que $\tau_a(\chi) = \bar{\chi}(a)\tau(\chi)$ pour tout $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b. Calculer $\tau(\chi)\overline{\tau(\chi)}$ et en déduire la valeur absolue $|\tau(\chi)|$.

c. Montrer que si $\chi(x) = \left(\frac{x}{p}\right)$ est le symbole de Legendre, alors on a $\tau(\chi)^2 = \chi(-1)p$ et en déduire que
$$\tau(\chi) = \pm \begin{cases} \sqrt{p} \text{ si } p \equiv 1 \mod 4, \\ i\sqrt{p} \text{ si } p \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

d. Soit q un nombre premier différent de p. Calculer $\tau(\chi)^q \mod q$ avec la formule de binôme. En déduire la loi de réciprocité :
$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}} \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = 1$$

e. Calculer $\left(\frac{79}{101}\right)$.

Exercice 12. *(Somme de Gauss quartique).* Soit p un nombre premier avec $p \equiv 1 \mod 4$, et soit $\chi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère d'ordre 4. On pose
$$J = \sum_{t=1}^{p-2} \left(\frac{1+t}{p}\right)\chi(t).$$

a. Montrer que
$$\tau(\chi)^2 = J\tau(\chi^2)$$
.

b. Montrer que J prend valeurs dans les nombres Gaussien $\mathbb{Z}[i]$ et que $J\bar{J} = p$. En déduire que tout nombre premier p avec $p \equiv 1 \mod 4$ est une somme de deux carrées.

c. Montrer que tout nombre premier p avec $p \equiv 3 \mod 4$ n'est pas une somme de deux carrés.

Exercice 13.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^s}$$
converge pour tout $s \in \mathbb{R}_{>1}$.

b. Montrer que pour tout $x > 0$ on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} < \frac{\pi}{2x}$$

c. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + m^4} < \frac{\pi^3}{12}$$

Exercice 14. *(Séries d'Eisenstein).* Soient $\tau \in \mathbb{C}$ avec $\Im m\ \tau > 0$, et $s \in \mathbb{R}_{>0}$.

a. Montrer que la série d'Eisenstein
$$E(s,\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{|m+n\tau|^{2s}}$$
converge absolument lorsque $s > 1$.

b. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ la série d'Eisenstein
$$E_{2k}(\tau) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}$$
définit bien une fonction holomorphe sur le demi-plan supérieur $\tau \in \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \Im m\ \tau > 0\}$

c. Soit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ une matrice aux éléments entiers et déterminant 1. Calculer $E\left(s, \dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ et $E_{2k}\left(\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$.

Exercice 15. Considérons la fonction
$$f(z) = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

a. Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

b. Montrer que f est bornée.

c. Calculer $\lim\limits_{\Im m\, z \to \infty} f(z)$.

d. En déduire que $f = 0$.

e. Montrer que
$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right).$$

f. Montrer que
$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{z^2}{n^2})$$
.

Exercice 16. *(Fonction $\wp$ de Weierstrass).* Considérons la fonction

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(z+m+n\tau)^2} - \frac{1}{(m+n\tau)^2}$$

a. Montrer que la série est convergente et que $\wp$ est une fonction holomorphe en dehors de l'ensemble $\{m + n\tau | m, n \in \mathbb{Z}\}$.

b. Calculer $\wp(z + m + n\tau)$.

Exercice 17. Soit C l'ensemble des fonctions complexes définies sur $\mathbb{N}^*$. Pour $f, g \in C$ on pose

$$f \star g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) = \sum_{d_1,d_2|d_1 d_2=n} f(d_1)g(d_2)$$

convolution multiplicative de f et g.

a. Montrer que la convolution est commutative et associative.

b. Trouver une fonction $\varepsilon \in C$ telle que $f \star \varepsilon = f$.

c. Décrire toutes fonctions $f \in C$ inversibles par rapport à la convolution.

d. Monter que l'espace de fonctions multiplicatives est fermé par rapport à la convolution.

e. Soit $\mu \in C$ la fonction telle que $\mu(n) = (-1)^r$ si $n = p_1 \cdots p_r$ est un produit de r nombres premiers distincts, et $\mu(n) = 0$ sinon. On appelle μ *la fonction de Möbius*. Calculer $\mu \star 1$. En déduire l'inverse de la fonction μ par rapport à la convolution.

f. Soit $\varphi \in C$ la fonction définie par $\varphi(n) = \#(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. On appelle φ *l'indicatrice d'Euler*. Calculer $\sum_{d|n} \varphi(n)$.

g. Let $g \in C$. Trouver la fonction $f \in C$ telle que $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Exercice 18. On dit que $f \in C$ est à *croissance polynomiale*, s'il existe un entier k tel que $f(n) = O(n^k)$ lorsque $n \to \infty$. On notera par $C' \subset C$ l'espace de fonctions de croissance polynomiale.

Pour $f \in C'$ on pose

$$L(s, f) = \sum_n \frac{f(n)}{n^s}.$$

a. Montrer que C' est fermé par rapport à la convolution.

b. Montrer que $L(s, f)$ est une fonction holomorphe pour $\mathfrak{Re}(s)$ assez grand.

c. Exprimer $L(s, f \star g)$ en termes de $L(s, f)$ et $L(s, g)$.

d. Calculer $L(s, \mu)$ et $L(s, \varphi)$ en termes de $\zeta(s) = L(s, 1)$, ou φ est l'indicatrice d'Euler et μ - la fonction de Möbius.

Exercice 19. La *fonction de Liouville* $\lambda \in C'$ est une fonction strictement multiplicative définie par $\lambda(p) = -1$ pour tout p premiers.

a. Calculer $\sum_{d|n} \lambda(d)$.

b. Exprimer $L(s, \lambda)$ en termes de la fonction zêta et comme un produit infini.

Exercice 20. Soit $k \in \mathbb{N}$ un nombre naturel et soit $\sigma_k(n)$ la somme de k-èmes puissances de diviseurs de n

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k.$$

Exprimer la série de Dirichlet $L(s, \sigma_k)$ en termes de la fonction zêta.

Exercice 21.

a. Exprimer la somme

$$\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^2\\(m,n)=1}} \frac{1}{m^2n^2}$$

en termes de la fonction zêta.

b. La même question pour la somme

$$\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k\in\mathbb{N}^k\\(m_1,\ldots,m_k)=1}}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}}$$

Exercice 22.
Soit $J_k(n)$ est le nombre de k-tuplets d'entiers positifs $n_1,\ldots,n_k$ inférieurs à n tels que $(n_1,\ldots,n_k,n)=1$.

a. Exprimer $J_k(n)$ en termes de diviseurs premiers de n.

b. Calculer $\sum_{d|n} J_k(n)$.

c. Calculer la série de Dirichlet $L(s,J_k)$.

Exercice 23. La *fonction Λ de von Mangoldt* est définie par

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{si } n = p^a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour une fonction f strictement multiplicative

$$\frac{L(s,f)'}{L(s,f)} = -L(s,\Lambda f).$$

Exercice 24. *Formule de Perron.* Calculer l'intégrale

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(s,f)x^s \frac{ds}{s}$$

pour $x\in\mathbb{R}_{>0}$ et c assez grand afin que l'intégrale converge.

Exercice 25. Les *nombres de Bernoulli* B_k sont défini par le développement

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k$$

a. Calculer B_0, B_1 B_2, B_4 et B_k pour $k>1$ impaires.

b. Trouver le développement en série de Taylor de la fonction.

$$f(z) = \pi z \cot \pi z.$$

c. Exprimer $\zeta(2k)$, $k=1,2,\ldots$ en termes de nombres de Bernoulli.

d.* Utilisant l'équation fonctionnelle $\zeta^*(s) = \zeta^*(1-s)$ où

$$\zeta^*(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}|t|^{s-1}dt$$

exprimer $\zeta(-k)$, $k = 1, 2, \ldots$ en termes de nombres de Bernoulli.

e. Exprimer $S_m(n) = \sum_{i=0}^{n} i^m$ en termes de nombres de Bernoulli. *Indication :* Utiliser la formule d'Euler-Maclaurin :

$$\frac{1}{e^{\frac{\partial}{\partial x}} - 1} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(z),$$

où $f^{(-1)}(z) := \int_0^z f(t)dt$.

Exercice 26.

a. Trouver le domaine de divergence simple de la série

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

b. Exprimer $\eta(s)$ en termes de la fonction ζ.

c. Trouver le résidu $\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta(s)ds$.

Exercice 27.* Trouver la série de Taylor pour la série d'Eisenstein

$$E_{2k}(q) = \sum_{m,n \neq (0,0)} \frac{1}{(m + n\tau)^{2k}},$$

où $q = e^{2\pi i \tau}$.

Exercice 28. Trouver le résidu $\operatorname*{Res}_{s=1} L(s, \chi)ds$, où χ est un caractère de Dirichlet

a. non-trivial

b. trivial

modulo N.

Exercice 29. Trouver les limites

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\varphi(N)}{N} \text{ et } \liminf_{N\to\infty} \frac{\varphi(N)}{N}$$

où φ est l'indicatrice d'Euler.

Exercice 30. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\{x\}}{x^2}dx$, où $\{x\}$ est la partie fractionnelle de x. Exprimer le résultat en termes de la constante d'Euler-Mascheroni

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \approx 0.5772$$

Exercice 31. Trouver les produits infinis

a. $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$.

b. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1-z^n)^{\mu(n)/n}$.

c. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{2^n})$.

d.* $\displaystyle z\prod_{n=1}^{\infty}(1+\frac{z}{n})e^{-z/n}$,

e.* Trouver la série de Taylor de $\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$.

Reponses :

2. c : (a,b) ; d : 26.
3. b : $\phi(n) = n\prod_{p|n}(1-p^{-1})$, c. Le nombre d'éléments d'ordre 2 est 2,4 et 8 respectivement, d : 25.
4. c : p^{e-1}.
7. a : (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,1,-1,-1), (1,-1,-1,1). b : $(1, \zeta^k, \zeta^{2k}, \zeta^{5k}, \zeta^{4k}, \zeta^{3k})$ où $k = 0, \dots, 5$ et $\zeta = \exp \pi i/3$, c : $\chi(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}}$ si $p \neq 2$, $\chi_1(x) = (-1)^{\frac{x-1}{2}}$, $\chi_2(x) = (-1)^{\frac{x^2-1}{8}}$, $\chi_3 = \chi_1\chi_2$ si $p = 2$.
9. b : $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \begin{cases} 1 \text{ if } p = 1 \mod 4 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$, c : $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} 1 \text{ if } p = \pm 1 \mod 8 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$
10. $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ si $p \neq 2$; $a = 1 \mod 4$ si $p = 2$, $k = 2$; $a = 1 \mod 8$ si $p = 2$, $k > 2$.
11. b : $p, \sqrt{p}$, e :1.
14. c : $(c\tau + d)^{-2s}E(s,\tau)$, $(c\tau+d)^{-2k}E_{2k}(\tau)$.
15. c : 0.
16. b : $\wp(z)$.
17. b : $\begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ c : $f(n) \neq 0$, e : ε, 1, f : n, g : $g = \mu \star f$.
18. c : $L(s,f)L(s,g)$, d : $\zeta(s)^{-1}$, $\zeta(s-1)/\zeta(s)$.
19. a : $\begin{cases} 1 & n = m^2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, b : $\dfrac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \displaystyle\prod_p \frac{1}{1+p^{-s}}$.
20. $\zeta(s-k)\zeta(s)$.
21. a : $\zeta(2)^2/\zeta(4) = 5/2$, b : $\zeta(s_1)\cdots\zeta(s_r)/\zeta(s_1+\cdots+s_r)$.
22. a : $n^k\prod_{p|n}(1-p^{-k})$, b : n^k, d : $\zeta(s-k)/\zeta(s)$.
24. $\sum_{n<x} f_n$.
25. a :1, $-1/2$, $1/6$, $-1/30$, 0, b : $1 - \pi i z + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2\pi)^{2k}}{(2k)!}z^{2k}$, c : $\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$, d : $\zeta(-k) = \frac{(-1)^k}{k+1}B_{k+1}$, e : $\frac{1}{m+1}\left((n+1)^{m+1} + \sum_{l=1}^{m+1} B_l\binom{m+1}{l}(n+1)^{m+1-l}\right)$.
26. a : $\Re e(s) > 0$, b : $(1-2^{1-s})\zeta(s)$, c : 1
27. $2\zeta(2k) + 2\frac{(2\pi i)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$.
28. a : 0, b : $\frac{\varphi(N)}{N}$.
29. 1,0.
30. $1-\gamma$.
31. a : 3, b : e^z, c : $1/(1-z)$, d : $e^{\gamma z}/\Gamma(z)$, e : $\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{3k^2-k}{2}}$