

Exercice 1. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a. $(1 + i)^2$

d. $\frac{1}{(2 - i)}$

f. $\frac{2 + i}{2 - i}$

b. $i(1 + 2i)(1 - i)$

c. $(\sqrt{3} - i\sqrt{2})(\sqrt{3} + i\sqrt{2})$

e. $(-2 + i)(1 - i)^4$

g. $\frac{-1 + i}{3 - i}$

Exercice 2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Déterminer, en fonction de x et y , la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants.

a. $z^2 - 2z$

b. z^3

c. $\frac{1}{z}$

d. $\frac{z + 1}{z - 1}$

Exercice 3. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire.

a. -5

b. $3i$

c. $1 + i$

d. $1 - i\sqrt{2}$

e. $-\sqrt{3} + i$.

Exercice 4. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

a. $e^{3i\pi}$

b. $e^{-i\pi}$

c. $6e^{i\pi/4}$

d. $e^{7i\pi/6}$

e. $e^{i\pi/5}$.

Exercice 5. Calculer en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$.

a. $\sin 3\theta$,

b. $\cos 3\theta$,

c. $\sum_{k=0}^n \cos n\theta$.

Exercice 6. Déterminer et représenter graphiquement les racines

a. $\sqrt[6]{1}$,

b. $\sqrt[2]{i}$,

c. $\sqrt[3]{-1}$,

d. $\sqrt[4]{-1}$,

Exercice 7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(1 + i)^n + (1 - i)^n$.

Exercice 8. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

a. $(1 + i)z + 3i = -3 - i$,

d. $z^2 + (1 - i)z - i = 0$,

b. $iz + \bar{z} = 2$,

e. $z^3 = \bar{z}^2$,

c. $\bar{z} = \frac{1}{z}$,

Exercice 9. Exprimer en fonction de $x = (z + \bar{z})/2$ et $y = (z - \bar{z})/2i$ les expressions suivantes

a. $dzd\bar{z}$,

b. $\frac{dz}{z}$.

c. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$,

Exercice 10. Exprimer en fonction de $z = re^{i\phi}$ et $\bar{z} = re^{-i\phi}$ les expressions suivantes

a. $\frac{\partial}{\partial \phi}$,

b. $d\phi$,

c. $r \frac{\partial}{\partial r}$.

d. $rdrd\phi$.

Exercice 11. Calculer les différentielles des formes suivantes :

- a. $x dy - y dx$, b. $x dy + y dx$, c. $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

Exercice 12. Soit $\gamma : t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$, $-1 \leq t \leq 1$ une courbe.

- a. Tracer la courbe,
b. Calculer $\int_{\gamma} x dy - y dx$.
c. Calculer l'aire borné par la courbe.