Exercice 1. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

a. $(1+i)^2$

b. $i(1+2i)(1-i)$

c. $(\sqrt{3} - i\sqrt{2})(\sqrt{3} + i\sqrt{2})$

d. $\dfrac{1}{(2-i)}$

e. $(-2+i)(1-i)^4$

f. $\dfrac{2+i}{2-i}$

g. $\dfrac{-1+i}{3-i}$

Exercice 2. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Déterminer, en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants.

a. $z^2 - 2z$

b. z^3

c. $\dfrac{1}{z}$, $z \neq 0$

d. $\dfrac{z+1}{z-1}$, $z \neq 1$.

Exercice 3. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme polaire.

a. -5

b. $3i$

c. $1+i$

d. $1 - i\sqrt{2}$

e. $-\sqrt{3} + i$.

Exercice 4. Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

a. $e^{3i\pi}$

b. $e^{-i\pi}$

c. $6e^{i\pi/4}$

d. $e^{7i\pi/6}$

e.* $e^{i\pi/5}$.

Exercice 5. Calculer en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

a. $\sin 3\theta$,

b. $\cos 3\theta$,

Exercice 6. Calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta.$$

Exercice 7. Déterminer et représenter graphiquement les racines

a. $\sqrt[6]{1}$,

b. $\sqrt[2]{i}$,

c. $\sqrt[3]{-1}$,

d. $\sqrt[4]{-1}$,

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $(1+i)z + 3i = -3 - i$,

b. $az + b\bar{z} + c = 0$, $a\bar{a} \neq b\bar{b}$.

c. $\bar{z} = \dfrac{1}{z}$,

d. $z^2 + (1-i)z - i = 0$,

e. $z^3 = \bar{z}^2$,

Exercice 10. Décrire géométriquement l'ensemble des solutions de

a. $|z| < 2$,

b. $|\mathfrak{Re}\, z| < 1$,

c. $\left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = 1$,

d. $az + \bar{a}\bar{z} + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

e. $z\bar{z} + az + \bar{a}\bar{z} + c = 0$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Exprimer en fonction de $x = (z + \bar{z})/2$ et $y = (z - \bar{z})/2i$ les expressions suivantes

a. $dz d\bar{z}$,

b. $\dfrac{dz}{z}$,

c. $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$,

d. $\left(z\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left(\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial z}\right) - \left(\bar{z}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\left(z\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$.

Exercice 12. Exprimer en fonction de $z = re^{i\phi}$ et $\bar{z} = re^{-i\phi}$ les expressions suivantes

a. $\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$,

b. $d\varphi$,

c. $r\dfrac{\partial}{\partial r}$.

d. $r dr d\varphi$.

Exercice 13. Calculer les différentielles des formes suivantes :

a. $\dfrac{1}{1 + z\bar{z}}$,

b. $x dy - y dx$,

c. $x dy + y dx$,

d. $\dfrac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

Exercice 14. Soit $\gamma : t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ une courbe (cubique de Tschirnhausen).

a. Tracer la courbe,

b. Calculer $\int_\gamma x dy - y dx$.

c. Calculer l'aire borné par la courbe.

Exercice 15. Calculer les intégrales

a. $\displaystyle\int_{C(0,r)} z^k dz$, où $C(0, r) = \{z \| z| = r\}$ est le cercle de rayon r orienté positivement.

b. $\displaystyle\int_{C(2,1)} z^k dz$, où $C(2, 1) = \{z \| z - 2| = 1\}$, $k \neq -1$.

c. $\displaystyle\int_{D(0,r)} z^k \bar{z}^k dz d\bar{z}$, où $D(0, r) = \{z \| z| = r\}$ est le disque de rayon r.

d. $\displaystyle\int_{D(0,r)\cap\{\mathfrak{Im}\, z \geqslant 0\}} z dz d\bar{z}$,

Exercice 16. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un segment réel. Calculer la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^b \frac{f(x)dx}{x - y - i\varepsilon} - \int_a^b \frac{f(x)dx}{x - y + i\varepsilon}\right)$$

pour $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 17. Calculer l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - a}$$

le long d'un chemin fermé γ disjoint de a en termes de l'indice de γ par rapport à a.

Exercice 18. En faisant le minimum de calculs possible, déterminer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{e^z}{z^n} dz,\ n \geq 1.$

b. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z} dz.$

c. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\sin(z)}{z} dz.$

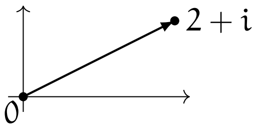
d. $\displaystyle\int_{C(0,1)} \frac{\cos(z)}{z^2} dz,$

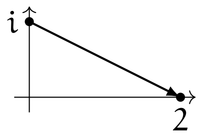
e. $\displaystyle\int_{C(i,1)} \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} dz,$

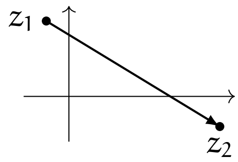
f. $\displaystyle\int_{C(-i,1)} \frac{e^{\pi z}}{z^2+1} dz,$

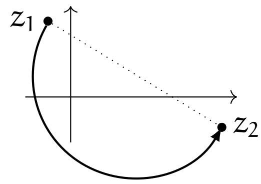
g. $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{z^2+2}{z^3-z} dz,$

Exercice 19. Donner une paramétrisation pour chacun des chemins suivants :

a. 

b. 

c. 

d. 

Exercice 20. Trouver les homographies qui envoient le triplet de points $(0, 1, \infty)$ sur les triplets

a. $(\infty, 0, 1)$,

b. $(1, 0, \infty)$,

c. $(-1, i, 1)$.

Exercice 21. Pour une homographie

$$f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

trouver

a. L'homographie inverse,

b. Les points fixes,

c. L'image d'un cercle,

d. L'image d'un droite.

Exercice 22. Soit S la sphère unité dans $\mathbb{C} + \mathbb{R}$

$$S = \{(z, c) | z\bar{z} + c^2 = 1\}$$

trouver les coordonnées du point d'intersection entre la droite passant par $(0, 1)$ et $(z, 0)$ avec la sphère S.

Exercice 23. Calculer le rayon de convergence des séries

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n,$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n,$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n,\ k \in \mathbb{R}.$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n,$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2},$

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n,$

Exercice 24. Trouver les séries de Taylor des fonctions

a. $\sin z$,

b. $\cos z$,

c. $(1+z)^{a}$,

d. $(1-az)^{-1}$,

e. $\ln(1-z)$,

f. $\operatorname{arctg} z$,

g. $\arcsin z$,

h. $\dfrac{1}{1-z-z^{2}}$,

Exercice 25. Soit $\sum_{i=0}^{\infty} a_k z^k$ la série de Taylor de la fonction $f(z)$. Trouver les sommes

a. $\sum_{i=0}^{\infty} a_{2k} z^k$,

b. $\sum_{i=0}^{\infty} a_{2k+1} z^k$,

c. $\sum_{i=0}^{\infty} a_{5k+2} z^k$

Exercice 26. Calculer les sommes des séries

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\alpha}{n}$

b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin n\alpha}{n}$

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)\alpha}{2n+1}$.

Exercice 27. Décrire, s'il en existe, toutes les fonctions holomorphes $f : D(1,1) \to \mathbb{C}$ qui satisfont, pour tout $n \geqslant 2$

a. $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$,

b. $f(1+\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$,

c. $f(1+\frac{1}{n}) = e^{-n}$,

d. $f(1+\frac{1}{2n}) = f(1+\frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{n}$,

Exercice 28. Trouver l'ordre des fonctions

a. $\operatorname{Ord}_z \dfrac{z^6-1}{z^4-1}$,

b. $\operatorname{Ord}_0 \left(\dfrac{1}{\sin z} - \dfrac{1}{z}\right)$,

c. $\operatorname{Ord}_0 \left(e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}\right)$,

d. $\operatorname{Ord}_z \left(z - \sqrt{2-2\cos z}\right)$.

e.* $\operatorname{Ord}_0(\operatorname{tg}(\sin z) - \sin(\operatorname{tg}(z)))$,

Exercice 29.

Pour la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Déterminer le développement en série de Laurent de f sur les anneaux :

a. $0 < |z| < 1$,

b. $1 < |z| < 2$,

c. $2 < |z|$.

Exercice 30.

Calculer les résidus

a. $\operatorname{Res}_0 \dfrac{\sin z}{z^4} dz$

b. $\operatorname{Res}_{z_0} \dfrac{e^{az}}{1-e^z} dz, \quad z_0 = 2\pi i k$,

c. $\operatorname{Res}_{z_0} \dfrac{z+1}{z^2-9} dz, \quad z_0 = -3, 3, \infty$.

d. $\operatorname{Res}_0 \dfrac{dz}{z^3 \cos z}$,

e. $\operatorname{Res}_{\pi/3} \dfrac{\sin z dz}{1-2\cos z}$.

f.* $\operatorname{Res}_0 \dfrac{e^{az}}{\operatorname{sh}^k z} dz$.

Exercice 31. Calculer les sommes

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$,

b. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$,

c. $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z-n)^4}$,

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.

Exercice 32. Calculer les intégrales définies :

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$,

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx$,

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx$,

d. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$,

e. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$,

f. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{5+3\sin t} dt$,

g. $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\cos^2 t}{(3+2\cos t)^2} dt$,

h. $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} dt$,

i. $\displaystyle\int_{C(0,8)} \frac{1+z}{1-e^z} dz$,

j. $\displaystyle\int_{C(i,5)} \frac{z^2}{z^3-z^2-z+1} dz$,

k. $\displaystyle\int_{C(0,2)} z^9 e^{1/z} dz$,

l. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{\mathrm{ch}(z)} dz$,

m. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}-1}{z} dz$,

n. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt$,

o. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x dx}{1+x^2}$.

p. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n}$,

q. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(1+x)}$, $0<p<1$,

r. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^{1-p}(1-x)^p dx}{(1+x)^3}$, $0<p<1$.

Exercice 33. Calculer l'intégrale double

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{(z-a)(z-b)(\bar{z}-\bar{c})(\bar{z}-\bar{g})} dz d\bar{z}$$

Exercice 34. Déterminer le nombre de solutions (comptés avec multiplicités) des équations suivantes dans le domaine indiqué :

a. $2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$ dans $D(0,1)$,

b. $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$ dans $D(0,1)$,

c. $z^4 - 5z + 1$ dans $D(0,1)$,

d. $z^4 - 5z + 1$ dans $D(0,2) \setminus D(0,1)$.

Exercice 35.

a. Trouver la série de Laurent $\theta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_0 = 1$ de la fonction $\theta(z)$ satisfaisant l'équation
$$\theta(z) = q^{1/2} z \theta(qz),$$
où $0 < |q| < 1$.

b. Trouver le nombre de zéros de la fonction thêta $\theta(z)$ dans l'anneau $|q| < z \leqslant 1$.

c. Trouver les zéros de la fonction thêta $\theta(z)$.

Exercice 36. Exprimer les intégrales en termes de la fonction gamma.

a. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x \, dx,$

b. $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha}(1+x)^{\beta-\alpha} dx.$

Exercice 37. Trouver les séries de Taylor des fonctions réciproque au fonctions :

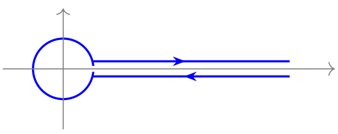
a. $z - z^2,$

b. $ze^z,$

c. $ze^{z^2}.$

Exercice 38. Calculer l'intégrale
$$\int_{\gamma} \frac{1}{e^x - 1} x^s \frac{dx}{x},$$
où

a. $\gamma = \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\Re\mathrm{e}\, s > 1$ utilisant la série $\displaystyle\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$

b. $\gamma =$  (chemin de Hankel)

Exercice 39. Trouver les produits infinis

a. $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}),$

b. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} e^{1/n},$

c. $\displaystyle\pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$

d. $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1},$

e. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{z/n}.$

f. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^n)$

Indication : Utiliser la constante d'Euler-Mascheroni $\displaystyle\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n.$

Exercice 40. Trouver une fonction méromorphe G telle que $\operatorname*{Ord}_{-n} G(z) = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$ et holomorphe en tout autre point.