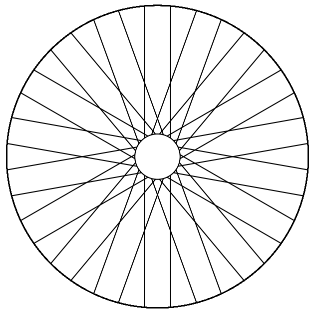
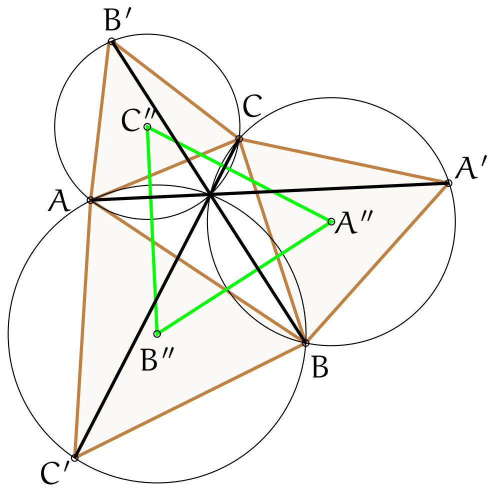
Année 2022-2023

Mathématiques L3 (S6). Géométrie. Mis à jour le 15 mars 2023.

Exercice 1. Soit ABC un triangle dans le plan, S_A, S_B et S_C — les symétries par rapport aux points A, B et C respectivement. Trouver la composition $S_C \circ S_B \circ S_A \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.



Exercice 2*. Soient r le rayon du moyeu et R le rayon de la jante d'une roue de vélo. Le nombre de rayons est $2N$ et le nombre de rayon intersectés par chaque rayon est k. Trouver la longueur des rayons.



Exercice 3. Soit ABC, un triangle $A'BC$, $AB'C$ et ABC' triangles équilatérales disjoints de ABC.

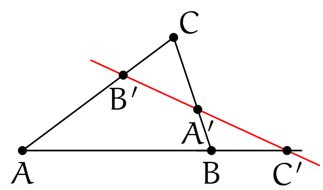
a. *Théorème de Toricelli.* Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ de même longueur et de l'angle $\pi/3$ entre eux.

b. Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ et les cercles circonscrits des triangles équilatérals ont un point commun.

c. *Théorème de Napoleon.* Let A'', B'' et C'' sont les centres des triangles équilatérals respectifs. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est équilatéral.

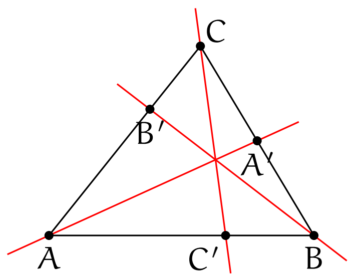
Exercice 4. *Théorème de Ménélaüs.* Soit ABC un triangle et A', B' et C' sont des points sur les droites BC, CA et AB, respectivement. Montrer que les points A',B' et C' sont colinéaires si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}}\frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}}\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} = 1$$



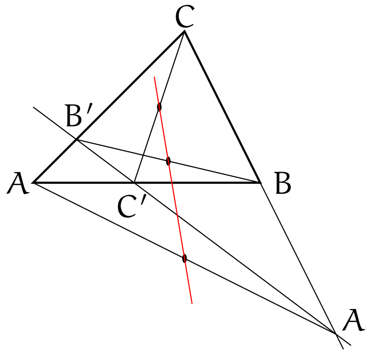
Exercice 5*. *Théorème de Ceva.* Soit ABC un triangle et A', B' et C' sont des points sur les droites BC, CA et AB, respectivement. Montrer que les droites AA',BB' et CC' sont concourants si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}}\frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}}\frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} = -1$$

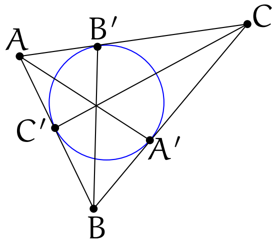


Indication : Calculer le barycentre de αA βB et γC ou α, β, γ sont trois poids arbitraires.

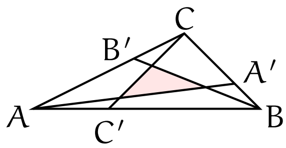
Exercice 6*. Soient ABC un triangle, l une droite et A', B' et C' les points d'intersection de l avec les droites (BC),(CA) et (AB), respectivement. Montrer que les milieux des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ sont alignés (Théorème de Gauss/ droite de Newton).



Exercice 7. Soit ABC un triangle et $A'B'C'$ sont les points d'intersection du cercle inscrit avec les cotés de ABC respectifs. Montrer que les droites AA', BB' et CC' sont concourants.



Exercice 8*. Soit ABC un triangle d'aire 1 et A', B', C' sont des points sur les cotés tels que $\dfrac{A'B}{A'C} = -x$, $\dfrac{B'C}{B'A} = -y$ et $\dfrac{C'A}{C'B} = -z$. Trouver l'aire du triangle délimité par les droites AA', BB' et CC' (Théorème de Routh).



Exercice 9. Soient l_1 et l_2 deux droites dans le plan qui s'intersectent en un point A et forment un angle α. Trouver la composition de symétries dans ces droites.

Exercice 10. Notons R^A_α la rotation du plan à l'angle α autour du point A. Soit ABC un triangle dans le plan. Trouver la composition des rotations

$$R^A_{2\angle CAB} \circ R^B_{2\angle ABC} \circ R^C_{2\angle BCA}$$

Exercice 11. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Existe-t-il un quadrilatère $A'B'C'D'$ circonscrit autour de $ABCD$ tel que les points A, B, C, D sont les milieux des côtés respectifs de $A'B'C'D'$? La même question pour un pentagone.

Exercice 12. Trouver le birapport de

a. $1, 2, 3, \infty$,

b. Les sommets d'un carré $0, 1, 1+i, i$,

c. Quatre sommets consécutifs d'un n-gone $1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, e^{\frac{6\pi i}{n}}$.

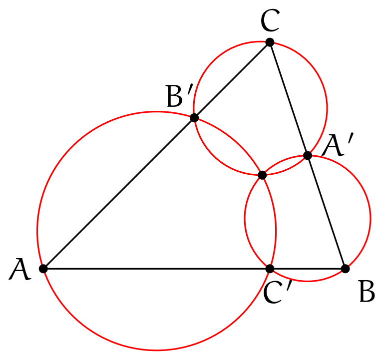
Exercice 13. Trouver l'équation du cercle passant par les points $0, 2, i$ dans les coordonnées complexes.

Exercice 14. Trouver l'image des cercles $(z-1)(\bar{z}-1)-1 = 0$ et $(z+1)(\bar{z}+1)-1 = 0$ par l'homographie $z \mapsto z^{-1}$.

Exercice 15. On dit qu'un quadruplet de points A, B, C, D de la droite projective est *harmonique* si le birapport $[A, B, C, D] = \frac{(A-D)(B-C)}{(A-B)(D-C)}$ vaut -1.

Soient c_1 et c_2 deux cercles orthogonaux, et soit l la droite passant par ces centres. Montrer que les points d'intersection entre et la droite l et les cercle forment un triplet harmonique.

Exercice 16. Soit ABC un triangle, $A'B'C'$ le points sur les côtés respectifs. Montrer que les cercles circonscrit autour des triangles $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ ont un point commun. (Théorème de Miquel.)



Exercice 17. En combien de composants connexes trois droites en position générale partagent

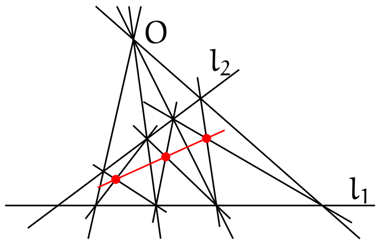
a. le plan affine.

b. le plan projectif réel.

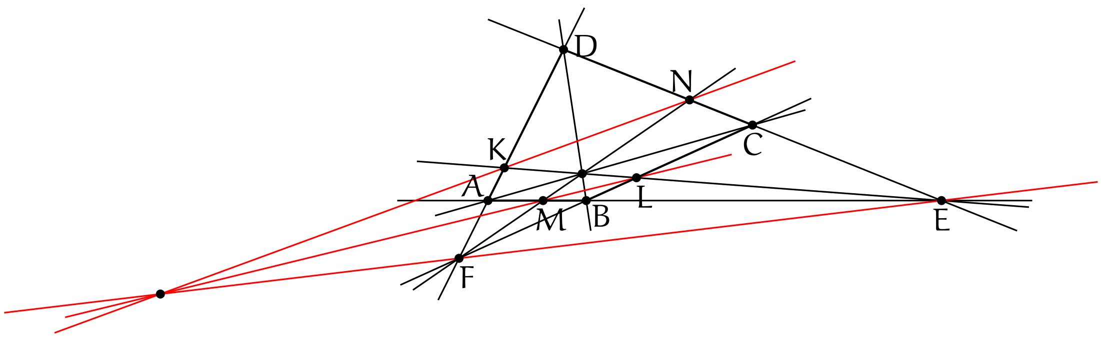
c. la droite projective complexe.

Exercice 18. Combien de points fixe peut avoir une transformation d'un plan projectif ?

Exercice 19. Soit l_1 et l_2 deux droites et O un point n'y appartenant pas. Monter que les points d'intersection des diagonales de quadrilatères dont deux cotés passent par O et deux appartiennent à l_1 et l_2 sont alignés.

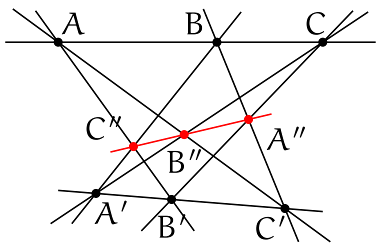


Exercice 20. Soit O l'intersection des diagonales d'un quadrilatère $ABCD$, E et F les points d'intersection des côtés opposés. K,L,M,N les points d'intersection entre les cotés de $ABCD$ avec les droites OE et OF. Montrer que les droites KM,LN et EF sont concourant.

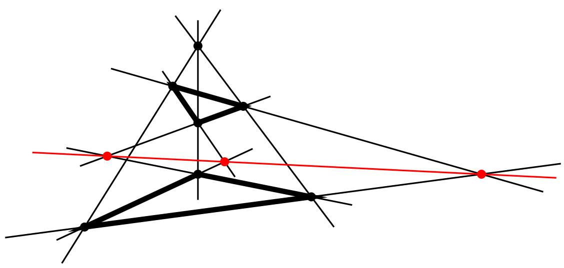


Exercice 21. Dans l'exercice 20, trouver le birapport $[F, A, K, D]$.

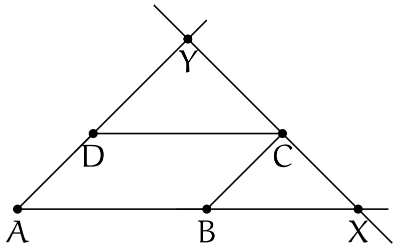
Exercice 22. *Théorème de Pappus.* Soient A,B,C et A',B',C' de triplets de points alignés. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont aussi aligné



Exercice 23.* *Théorème de Desargues.* Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites AA', BB' et CC' sont concourantes. Alors les points d'intersections $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ et $C'' = AB \cap A'B'$ sont alignés.

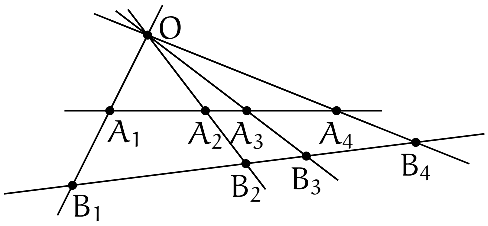


Exercice 24.

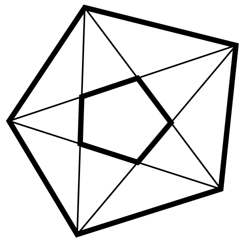


a. Soit $ABCD$ un parallélogramme, X un point de la droite AB, Y est l'intersection des droites CX et AD. Exprimer $y = |AY|$ en termes de $x = |AX|$, $b = |AB|$ et $d = |AD|$.

b.* Soient l_1 et l_2 deux droites différentes dans le plan et C un point du plan disjoint des droites. Montrer que la projection centrale de l_1 sur l_2 par rapport à C est une homographie.

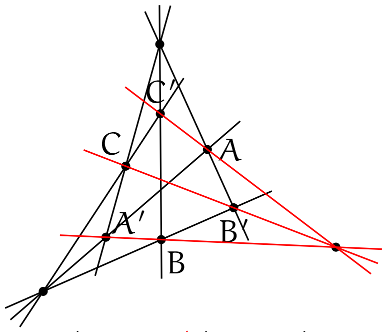


c.* On considéré un quadruplet de droites dans le plan passant par un point O et encore deux droites disjointes de O. On notera $A_1, \dots A_4$ et $B_1, \dots B_4$ les point d'intersection du quadruplet avec les deux autres droites respectives. Montrer que $[A_1, A_2, A_3, A_4] = [B_1, B_2, B_3, B_4]$.

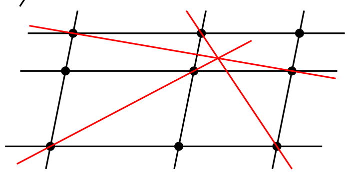


Exercice 25*. Considérons un pentagone dans le plan. Montrer que le pentagone formé par ces diagonales est projectivement équivalent au pentagone initial.

Exercice 26. Formuler le théorème dual au théorème de Pappus.



Exercice 27. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les droites AA', BB' et CC' sont concourants et les droites AB', BC' et CA' sont concourant. Montrer que AC', BA' et CB' sont aussi concourants.



Exercice 28. Soient l_1,l_2,l_3 et m_1,m_2,m_3 deux triplets de droites parallèles et soient $A_{ij} = l_i \cap l_j$. Montrer que les droites $A_{11}A_{22}$, $A_{13}A_{32}$ et $A_{31}A_{23}$ sont concourant.

Exercice 29. Tracer les configuration duale aux

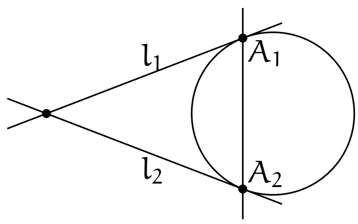
a. Ensemble de droites parallèles $\{y = n | n \in \mathbb{Z}\}$.

b. Quatre droite est six point d'intersections.

Exercice 30. Formuler le théorème dual au théorème de Desargues.

Exercice 31. Soit Q une conique dans un plan projectif. Trouver la courbe formée par les tangents à Q dans le plan dual.

Exercice 32. Soit Q un cercle, l_1 et l_2 deux tangentes dans les points A_1 et A_2, respectivement. Tracer l'image de cette configuration par l'homographie que envoie



a. la droite l_1 à l'infini.

b. la droite A_1A_2 à l'infini.

Exercice 33. Soient A, B, $C_1, \dots C_4$ six points distincts sur une conique. Montrer que les birapports des droites AC_i et BC_i sont égaux.

Exercice 34. Soit ABC un triangle et AX la médiane. Trouver la droite l passante par A telle que le birapport $[(AB), (AX), (AC), l] = -1$.

Exercice 35. Soit h est une homographie d'une conique Q. Montrer qu'il existe un prolongation de h au plan projectif.

Exercice 36. Trouver les homographies du plan projectif préservant le cercle unité correspondant au homographies du cercle unité $z \to z+1$, $z \to 1/z$ et $z \to xz$.

Exercice 37. Soient Q une conique, P un point disjoint de Q et p sa polaire par rapport à Q. Soit l une droite passant par P et soient A,B, C le points d'intersection de l avec Q et m, respectivement. Trouver le birapport $[A, B, C, P]$.

Exercice 38. Trouver la polaire d'un point par rapport à une conique dégénérée.

Exercice 39*. Montrer que les polaires d'un point par rapport a un faisceau de coniques sont concourants. (Théorème de Lamé.)

Exercice 40. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans une conique q. Soient $l_A, \dots, L_D$ les tangents à la conique dans les poins respectifs. Montrer que les poins $(AB) \cap (CD)$, $(BC) \cap (DA)$, $l_A \cap l_C$ et $l_B \cap l_D$ sont alignés.

Exercice 41. Écrire l'équation du faisceau des coniques passant pas les points $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. Combien de coniques de ce faisceau sont dégénérées. Traces les.

Exercice 42. Soit $ABCDE$ cinq points dans le plan. Construire la tangente en A à la conique passant par $ABCDE$.

Exercice 43. On donne quatre droites en position générale dans un plan affine. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

Exercice 44. Trouver la limite du théorème de Brianchon quand l'hexagone se dégenre en quadrilatère.