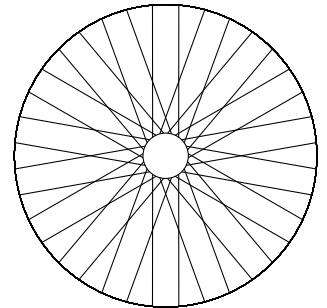


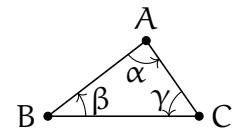
Exercice 1. Soit ABC un triangle dans le plan, S_A , S_B et S_C — les symétries par rapport aux points A , B et C respectivement. Trouver la composition $S_C \circ S_B \circ S_A \circ S_C \circ S_B \circ S_A$.



Exercice 2* Soient r le rayon du moyeu et R le rayon de la jante d'une roue de vélo. Le nombre de rayons est $2N$ et le nombre de rayon intersectés par chaque rayon est k . Trouver la longueur des rayons.

Exercice 3.

- a. Notons R_A^α la rotation du plan à l'angle α autour du point A . Soit ABC un triangle dans le plan avec les angles respectifs α , β et γ . Trouver la composition



$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}.$$

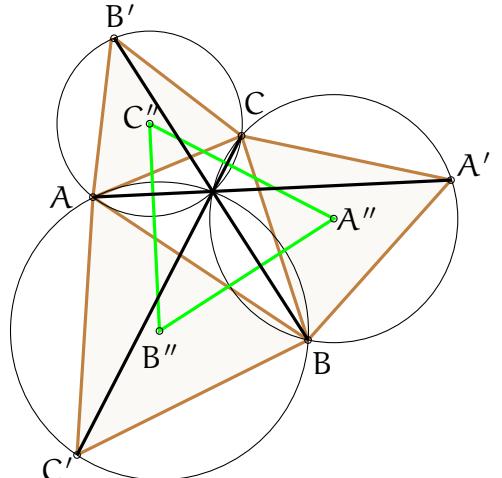
- b. Notons H_A^a l'homothétie avec le centre A et le rapport a . Montrer que si la composition de trois homothéties est l'identité

$$H_A^a \circ H_B^b \circ H_C^c = \text{id},$$

alors leurs centres A , B et C sont alignés.

Exercice 4. Soit ABC , un triangle $A'BC$, $AB'C$ et ABC' triangles équilatéraux disjoints de ABC .

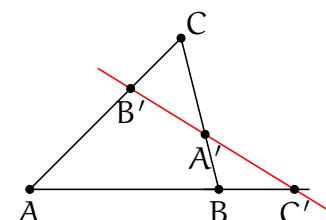
- a. *Théorème de Torricelli.* Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ de même longueur et de l'angle $\pi/3$ entre eux.
- b. Les segments $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ et les cercles circonscrits des triangles équilatéraux ont un point commun.
- c. *Théorème de Napoléon.* Let A'' , B'' et C'' sont les centres des triangles équilatéraux respectifs. Montrer que le triangle $A''B''C''$ est équilatéral.



Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère. Existe-t-il un quadrilatère $A'B'C'D'$ circonscrit autour de $ABCD$ tel que les points A , B , C , D sont les milieux des côtés respectifs de $A'B'C'D'$? La même question pour un pentagone.

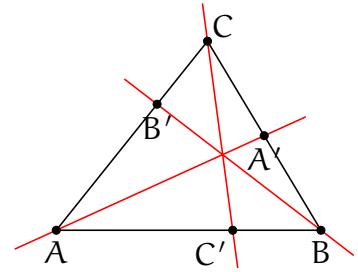
Exercice 6. Théorème de Ménélaüs. Soit ABC un triangle et A' , B' et C' sont des points sur les droites BC , CA et AB , respectivement. Montrer que les points A' , B' et C' sont colinéaires si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'B}}{\overrightarrow{C'A}} = 1$$



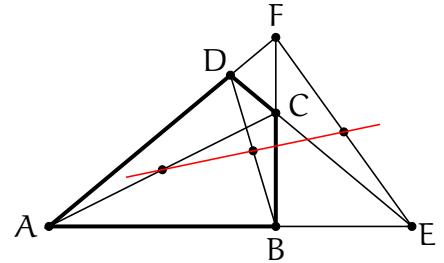
Exercice 7. *Théorème de Ceva.* Soit ABC un triangle et A' , B' et C' sont des points sur les droites BC , CA et AB , respectivement. Montrer que les droites AA' , BB' et CC' sont concourants si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BA}} \cdot \frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{CB}} = -1$$

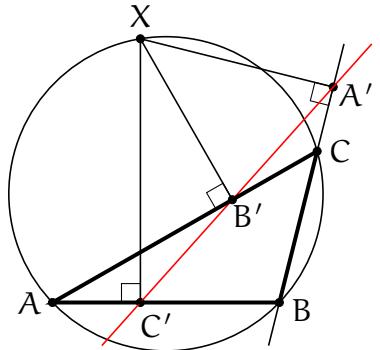


Indication: Calculer le barycentre de $\alpha A + \beta B + \gamma C$ où α, β, γ sont trois poids arbitraires.

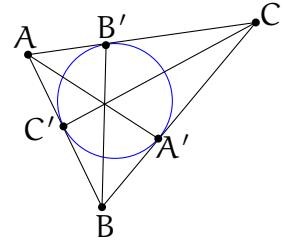
Exercice 8* *Droite de Gauss-Newton.* Soient $ABCD$ un quadrilatère, $E = (AB) \cap (CD)$ et $F = (AD) \cap (BC)$ les intersections de ces côtés opposés. Montrer que les milieux des diagonales AC , BD et du segment EF sont alignés.



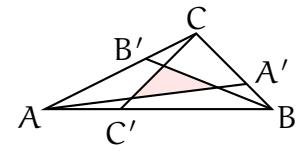
Exercice 9. *Droite de Simpson.* Soit ABC un triangle, X un point. Soient $A'B'C'$ sont des bases de droites perpendiculaire au côtés du triangle passant par X . Alors A', B', C' sont colinéaires si et seulement si X, A, B et C sont cocirculaires.



Exercice 10. Soit ABC un triangle et $A'B'C'$ sont les points d'intersection du cercle inscrit avec les cotés de ABC respectifs. Montrer que les droites AA' , BB' et CC' sont concourants.



Exercice 11* Soit ABC un triangle d'aire 1 et A', B', C' sont des points sur les cotés tels que $\frac{A'B}{A'C} = -x$, $\frac{B'C}{B'A} = -y$ et $\frac{C'A}{C'B} = -z$. Trouver l'aire du triangle délimité par les droites AA' , BB' et CC' (Théorème de Routh).



Exercice 12. Soient l_1 et l_2 deux droites dans le plan qui s'intersectent en un point A et forment un angle α . Trouver la composition de symétries dans ces droites.

Exercice 13. Trouver le birapport de

- a. $1, 2, 3, \infty$,
- b. Les sommets d'un carré $0, 1, 1+i, i$,
- c. Quatre sommets consécutifs d'un n -gone $1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, e^{\frac{6\pi i}{n}}$.

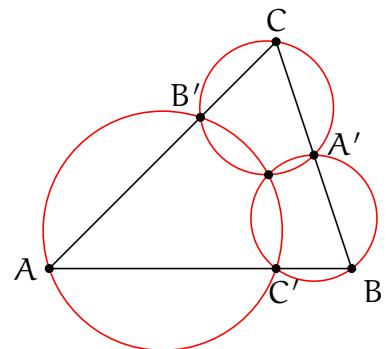
Exercice 14. Trouver l'équation du cercle passant par les points $0, 2, i$ dans les coordonnées complexes.

Exercice 15. Trouver l'image de par l'homographie $z \mapsto z^{-1}$ de

- a. cercle $(z - 1)(\bar{z} - 1) - 1 = 0$
- b. cercle $(z + 1)(\bar{z} + 1) - 1 = 0$
- c. hyperbole $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.
- d. parabole $z^2 + \bar{z}^2 + z + \bar{z} = 1$.

Exercice 16. On dit qu'un quadruplet de points A, B, C, D de la droite projective est *harmonique* si le rapport $[A, B, C, D] = \frac{(A-D)(B-C)}{(A-B)(D-C)}$ vaut -1 .

Soient c_1 et c_2 deux cercles orthogonaux, et soit l la droite passant par ces centres. Montrer que les points d'intersection entre l et les cercles forment un triplet harmonique.



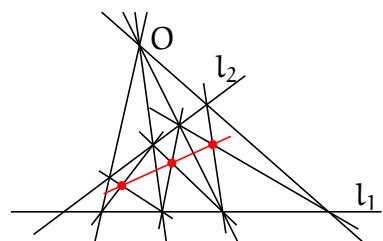
Exercice 17. *Théorème de Miquel.* Soit ABC un triangle, $A'B'C'$ les points sur les côtés respectifs. Montrer que les cercles circonscrits autour des triangles $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ ont un point commun.

Exercice 18. En combien de composants connexes trois droites en position générale partagent

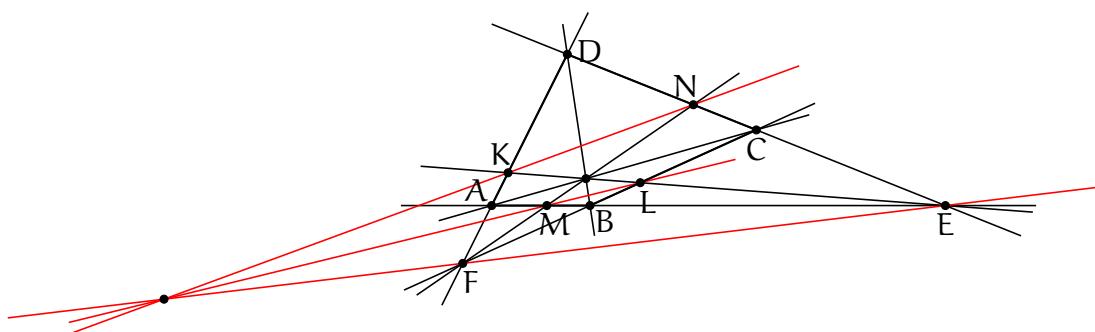
- a. le plan affine.
- b. le plan projectif réel.
- c. la droite projective complexe.

Exercice 19. Combien de points fixe peut avoir une transformation d'un plan projectif ?

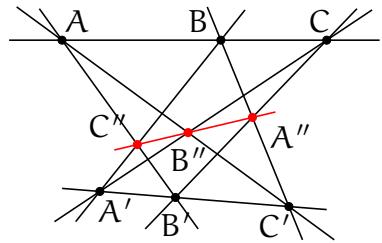
Exercice 20. Soit l_1 et l_2 deux droites et O un point n'y appartenant pas. Montrer que les points d'intersection des diagonales de quadrilatères dont deux cotés passent par O et deux appartiennent à l_1 et l_2 sont alignés.



Exercice 21. Soit O l'intersection des diagonales d'un quadrilatère $ABCD$, E et F les points d'intersection des côtés opposés. K, L, M, N les points d'intersection entre les cotés de $ABCD$ avec les droites OE et OF . Montrer que les droites KM, LN et EF sont concourant.

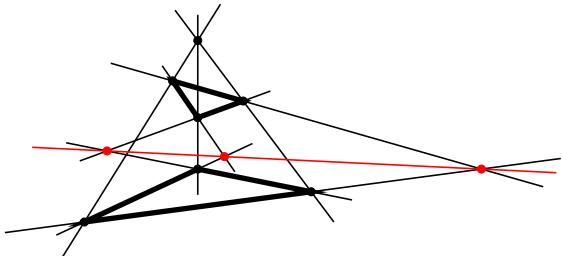


Exercice 22. Dans l'exercice 21, trouver le birapport $[F, A, K, D]$.



Exercice 23. Théorème de Pappus. Soient A, B, C et A', B', C' deux triplets de points alignés. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont aussi alignés.

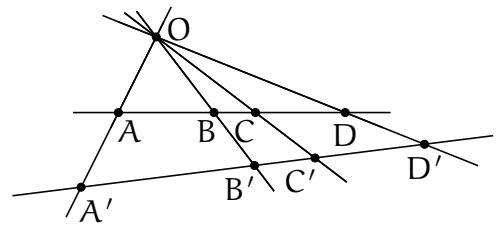
Exercice 24. Théorème de Desargues. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes. Alors les points d'intersections $A'' = BC \cap B'C'$, $B'' = AC \cap A'C'$ et $C'' = AB \cap A'B'$ sont alignés.



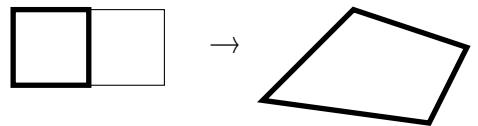
Exercice 25. Soit ABC un triangle et AX la médiane. Trouver la droite l passant par A telle que le birapport $[(AB), (AX), (AC), l] = -1$.

Exercice 26.

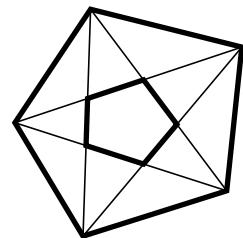
- On considère un quadruplet de droites dans le plan passant par un point O et encore deux droites disjointes de O . On notera A, B, C, D et A', B', C', D' les points d'intersection du quadruplet avec les deux autres droites respectives. Montrer que $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$.
- Soient l et l' deux droites, $A, B, C, D \in l$ quatre points distincts sur l et A', B', C' trois points distincts sur l' . Construire le point D' sur l' tel que les birapports $[A, B, C, D]$ et $[A', B', C', D']$ coïncident.



Exercice 27. Soit $ABCD$ un quadrilatérale et soit t une transformation projective qui envoie un carré standard sur ce quadrilatère. Construire l'image $DCEF$ du carré standard adjacent.



Exercice 28. Considérons un pentagone dans le plan. Montrer que le pentagone formé par ces diagonales est projectivement équivalent au pentagone initial.

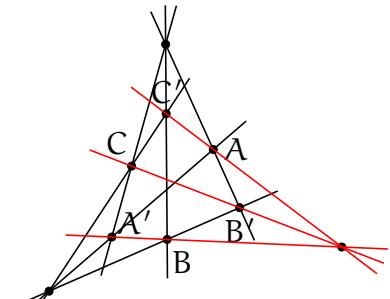


Exercice 29. Construire la droite entre deux points avec une règle courte.

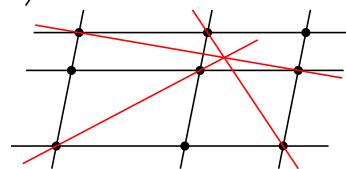
Exercice 30. Formuler le théorème dual au théorème de Pappus.

Exercice 31. Formuler le théorème dual au théorème de Desargues.

Exercice 32. Soient deux triangles ABC et $A'B'C'$ tels que les droites AA' , BB' et CC' sont concourantes et les droites AB' , BC' et CA' sont concourantes. Montrer que AC' , BA' et CB' sont aussi concourantes.



Exercice 33. Soient l_1, l_2, l_3 et m_1, m_2, m_3 deux triplets de droites parallèles et soient $A_{ij} = l_i \cap l_j$. Montrer que les droites $A_{11}A_{22}$, $A_{13}A_{32}$ et $A_{31}A_{23}$ sont concourantes.



Exercice 34. Tracer les configuration duale à

- Ensemble de droites parallèles $\{y = n | n \in \mathbb{Z}\}$.
- Quatre droite est six point d'intersections.

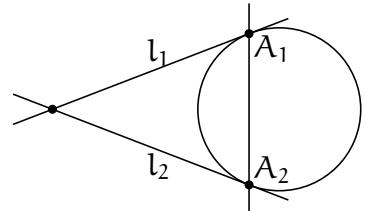
Exercice 35. Soit X un convexe dans un plan projectif.

- Montrer que l'ensemble de droites disjointes avec X est dual à un convexe dans le plan projectif dual.
- Trouver cet ensemble dans le cas où X est un triangle.

Exercice 36. Soit Q une conique dans un plan projectif. Trouver la courbe formée par les tangents à Q dans le plan dual.

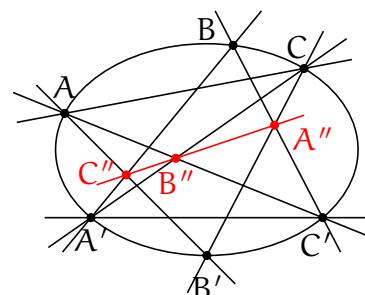
Exercice 37. Soit Q un cercle, l_1 et l_2 deux tangentes dans les points A_1 et A_2 , respectivement. Tracer l'image de cette configuration par la transformation projective qui envoie

- la droite l_1 à l'infini.
- la droite A_1A_2 à l'infini.



Exercice 38. Soient A, B, C_1, \dots, C_4 six points distincts sur une conique. Montrer que les birapports des droites AC_i et BC_i sont égaux.

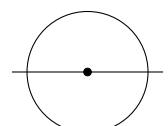
Exercice 39. Théorème de Pascal. Soient A, B, C et A', B', C' deux triplets de points sur une conique. Alors les points d'intersection $A'' = BC' \cap B'C$, $B'' = CA' \cap C'A$ et $C'' = AB' \cap A'B$ sont alignés.



Exercice 40. Théorème de Brianchon. Formuler le théorème dual au théorème de Pascal.

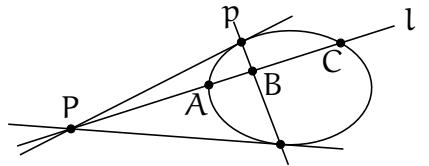
Exercice 41*

- Soit A un point à l'intérieur d'une conique q et l une droite passant par a . Montrer qu'il existe une transformation projective qui envoie q vers le cercle unité, A vers l'origine et l vers l'axe des abscisses.



- b. Soit h est une homographie d'une conique Q . Montrer qu'il existe une extension unique de h au plan projectif.
- c. Trouver les homographies du plan projectif préservant le cercle unité correspondant au homographies du cercle unité $z \rightarrow z + 1$, $z \rightarrow 1/z$ et $z \rightarrow \lambda z$.

Exercice 42. Soient Q une conique, P un point disjoint de Q et p sa polaire par rapport à Q . Soit l une droite passant par P et soient A, C et B les points d'intersection de l avec Q et p , respectivement. Trouver le birapport $[P, A, B, C]$.



Exercice 43. Trouver la polaire d'un point par rapport à une conique dégénérée.

Exercice 44. *Théorème de Lamé.* Montrer que les polaires d'un point par rapport à un faisceau de coniques sont concourantes.

Exercice 45. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans une conique q . Soient l_A, \dots, l_D les tangents à la conique dans les points respectifs. Montrer que les points $(AB) \cap (CD)$, $(BC) \cap (DA)$, $l_A \cap l_C$ et $l_B \cap l_D$ sont alignés.

Exercice 46.

- a. Écrire l'équation du faisceau des coniques passant pas les points $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(0, -1)$. Combien de coniques de ce faisceau sont dégénérées. Traces les.
- b. La même question pour les points $(-1, 0), (0, -1), (1, 0), (0, \infty)$.

Exercice 47. Soit $ABCDE$ cinq points dans le plan. Construire la tangente en A à la conique passant par $ABCDE$.

Exercice 48. On donne quatre droites en position générale dans un plan affine. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

Exercice 49. Trouver la limite du théorème de Brianchon quand l'hexagone se dégénère en quadrilatère.

Exercice 50. Construire les points de tangence d'un pentagone avec la conique inscrite.