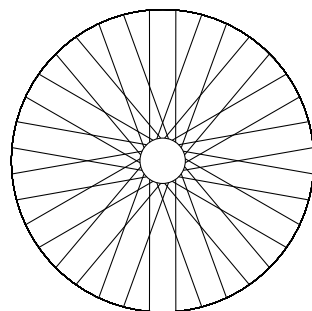


**Exercice 1.** Soit  $ABC$  un triangle dans le plan,  $S_A$ ,  $S_B$  et  $S_C$  — les symétries par rapport aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement. Trouver la composition  $S_C \circ S_B \circ S_A \circ S_C \circ S_B \circ S_A$ .

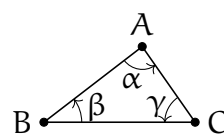
**Exercice 2\*** Soient  $r$  le rayon du moyeu et  $R$  le rayon de la jante d'une roue de vélo. Le nombre de rayons est  $2N$  et le nombre de rayon intersectés par chaque rayon est  $k$ . Trouver la longueur des rayons.



**Exercice 3.**

- a. Notons  $R_A^\alpha$  la rotation du plan à l'angle  $\alpha$  autour du point  $A$ . Soit  $ABC$  un triangle dans le plan avec les angles respectifs  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Trouver la composition

$$R_A^{2\alpha} \circ R_B^{2\beta} \circ R_C^{2\gamma}.$$



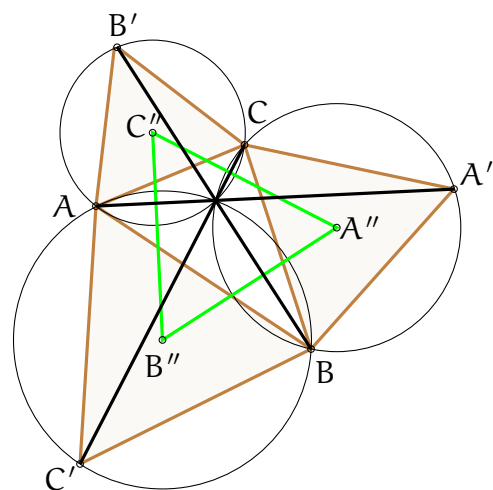
- b. Notons  $H_A^a$  l'homothétie avec le centre  $A$  et le rapport  $a$ . Montrer que si la composition de trois homothéties est l'identité

$$H_A^a \circ H_B^b \circ H_C^c = \text{id},$$

alors leurs centres  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

**Exercice 4.** Soit  $ABC$ , un triangle  $A'BC$ ,  $AB'C$  et  $ABC'$  triangles équilatéraux disjoints de  $ABC$ .

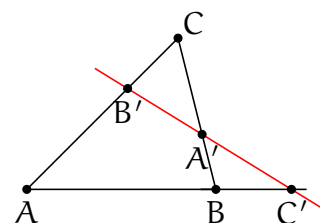
- a. *Théorème de Torricelli.* Les segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[CC']$  de même longueur et de l'angle  $\pi/3$  entre eux.
- b. Les segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[CC']$  et les cercles circonscrits des triangles équilatéraux ont un point commun.
- c. *Théorème de Napoléon.* Let  $A''$ ,  $B''$  et  $C''$  sont les centres des triangles équilatéraux respectifs. Montrer que le triangle  $A''B''C''$  est équilatéral.



**Exercice 5.** Soit  $ABCD$  un quadrilatère. Existe-t-il un quadrilatère  $A'B'C'D'$  circonscrit autour de  $ABCD$  tel que les points  $A, B, C, D$  sont les milieux des côtés respectifs de  $A'B'C'D'$  ? La même question pour un pentagone.

**Exercice 6.** *Théorème de Ménélaüs.* Soit  $ABC$  un triangle et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont des points sur les droites  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ , respectivement. Montrer que les points  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont colinéaires si et seulement si

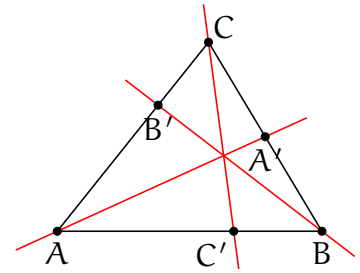
$$\frac{\overrightarrow{A'B}}{\overrightarrow{A'C}} \frac{\overrightarrow{B'C}}{\overrightarrow{B'A}} \frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{C'B}} = 1$$



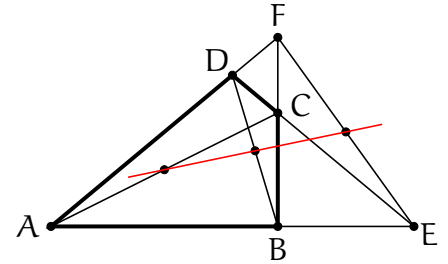
**Exercice 7. Théorème de Ceva.** Soit  $ABC$  un triangle et  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  sont des points sur les droites  $BC$ ,  $CA$  et  $AB$ , respectivement. Montrer que les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AC'}} \frac{\overrightarrow{BC'}}{\overrightarrow{BA'}} \frac{\overrightarrow{CA'}}{\overrightarrow{CB'}} = -1$$

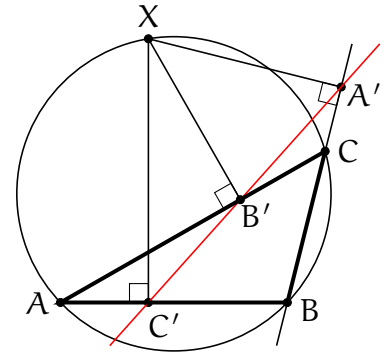
*Indication:* Calculer le barycentre de  $\alpha A + \beta B + \gamma C$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont trois poids arbitraires.



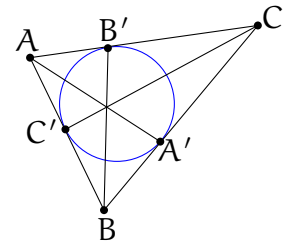
**Exercice 8\* Droite de Gauss-Newton.** Soient  $ABCD$  un quadrilatère,  $E = (AB) \cap (CD)$  et  $F = (AD) \cap (BC)$  les intersections de ces côtés opposés. Montrer que les milieux des diagonales  $AC$ ,  $BD$  et du segment  $EF$  sont alignés.



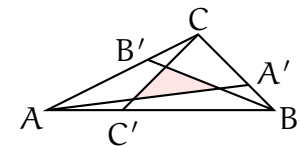
**Exercice 9. Droite de Simpson.** Soit  $ABC$  un triangle,  $X$  un point. Soient  $A'B'C'$  sont des bases de droites perpendiculaire au côtés du triangle passant par  $X$ . Alors  $A', B', C'$  sont colinéaires si et seulement si  $X, A, B$  et  $C$  sont cocirculaires.



**Exercice 10.** Soit  $ABC$  un triangle et  $A'B'C'$  sont les points d'intersection du cercle inscrit avec les cotés de  $ABC$  respectifs. Montrer que les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes.



**Exercice 11\*** Soit  $ABC$  un triangle d'aire 1 et  $A', B', C'$  sont des points sur les cotés tels que  $\frac{A'B}{A'C} = -x$ ,  $\frac{B'C}{B'A} = -y$  et  $\frac{C'A}{C'B} = -z$ . Trouver l'aire du triangle délimité par les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  (Théorème de Routh).



**Exercice 12.** Soient  $l_1$  et  $l_2$  deux droites dans le plan qui s'intersectent en un point  $A$  et forment un angle  $\alpha$ . Trouver la composition de symétries dans ces droites.

**Exercice 13.** Trouver le birapport de

- $1, 2, 3, \infty$ ,
- Les sommets d'un carré  $0, 1, 1+i, i$ ,
- Quatre sommets consécutifs d'un  $n$ -gone  $1, e^{\frac{2\pi i}{n}}, e^{\frac{4\pi i}{n}}, e^{\frac{6\pi i}{n}}$ .

**Exercice 14.** Trouver l'équation du cercle passant par les points  $0, 2, i$  dans les coordonnées complexes.

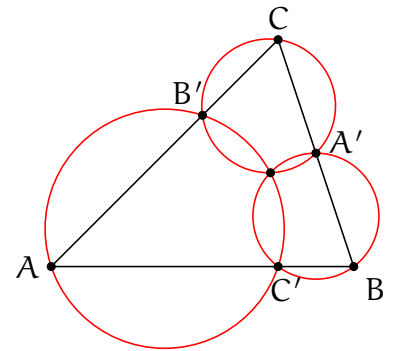
**Exercice 15.** Trouver l'image de par l'homographie  $z \mapsto z^{-1}$  de

- a. cercle  $(z-1)(\bar{z}-1)-1=0$
- b. cercle  $(z+1)(\bar{z}+1)-1=0$
- c. hyperbole  $z^2+\bar{z}^2=1$ .
- d. parabole  $z^2+\bar{z}^2+z+\bar{z}=1$ .

**Exercice 16.** On dit qu'un quadruplet de points  $A, B, C, D$  de la droite projective est *harmonique* si le birapport  $[A, B, C, D] = \frac{(A-D)(B-C)}{(A-B)(D-C)}$  vaut  $-1$ .

Soient  $c_1$  et  $c_2$  deux cercles orthogonaux, et soit  $l$  la droite passant par ces centres. Montrer que les points d'intersection entre et la droite  $l$  et les cercles forment un triplet harmonique.

**Exercice 17. Théorème de Miquel.** Soit  $ABC$  un triangle,  $A'B'C'$  les points sur les côtés respectifs. Montrer que les cercles circonscrit autour des triangles  $AB'C'$ ,  $A'BC'$  et  $A'B'C$  ont un point commun.

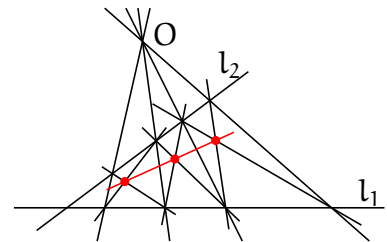


**Exercice 18.** En combien de composants connexes trois droites en position générale partagent

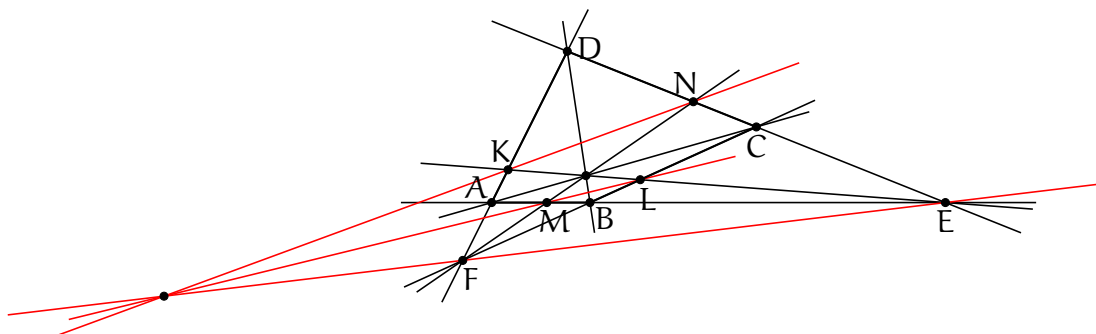
- a. le plan affine.
- b. le plan projectif réel.
- c. la droite projective complexe.

**Exercice 19.** Combien de points fixe peut avoir une transformation d'un plan projectif ?

**Exercice 20.** Soit  $l_1$  et  $l_2$  deux droites et  $O$  un point n'y appartenant pas. Montrer que les points d'intersection des diagonales de quadrilatères dont deux cotés passent par  $O$  et deux appartiennent à  $l_1$  et  $l_2$  sont alignés.

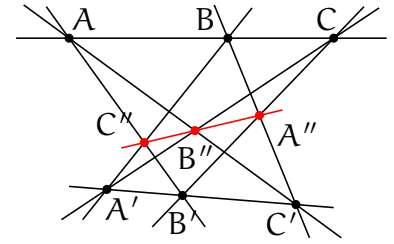


**Exercice 21.** Soit  $O$  l'intersection des diagonales d'un quadrilatère  $ABCD$ ,  $E$  et  $F$  les points d'intersection des côtés opposés.  $K, L, M, N$  les points d'intersection entre les cotés de  $ABCD$  avec les droites  $OE$  et  $OF$ . Montrer que les droites  $KM, LN$  et  $EF$  sont concourant.

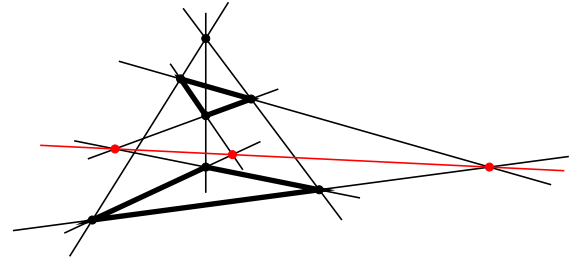


**Exercice 22.** Dans l'exercice 21, trouver le birapport  $[F, A, K, D]$ .

**Exercice 23. Théorème de Pappus.** Soient  $A, B, C$  et  $A', B', C'$  de triplets de points alignés. Alors les points d'intersection  $A'' = BC' \cap B'C$ ,  $B'' = CA' \cap C'A$  et  $C'' = AB' \cap A'B$  sont aussi alignés.



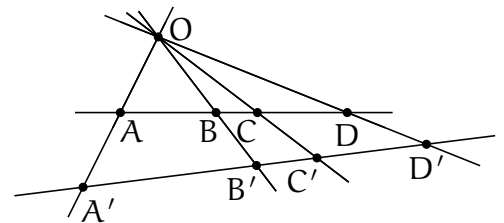
**Exercice 24. Théorème de Desargues.** Soient  $ABC$  et  $A'B'C'$  deux triangles tels que les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes. Alors les points d'intersections  $A'' = BC \cap B'C'$ ,  $B'' = AC \cap A'C'$  et  $C'' = AB \cap A'B'$  sont alignés.



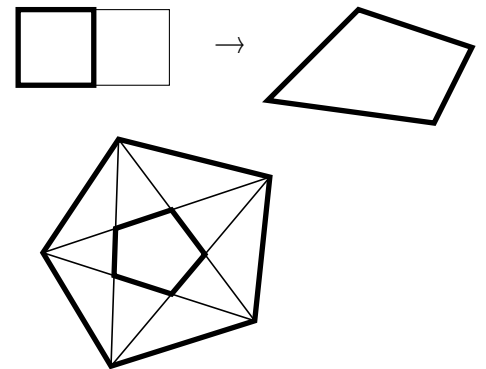
**Exercice 25.** Soit  $ABC$  un triangle et  $AX$  la médiane. Trouver la droite  $l$  passant par  $A$  telle que le birapport  $[(AB), (AX), (AC), l] = -1$ .

**Exercice 26.**

- On considère un quadruplet de droites dans le plan passant par un point  $O$  et encore deux droites disjointes de  $O$ . On notera  $A, B, C, D$  et  $A', B', C', D'$  les points d'intersection du quadruplet avec les deux autres droites respectives. Montrer que  $[A, B, C, D] = [A', B', C', D']$ .
- Soient  $l$  et  $l'$  deux droites,  $A, B, C, D \in l$  quatre points distincts sur  $l$  et  $A', B', C' \in l'$  trois points distincts sur  $l'$ . Construire le point  $D'$  sur  $l'$  tel que les birapports  $[A, B, C, D]$  et  $[A', B', C', D']$  coïncident.



**Exercice 27.** Soit  $ABCD$  un quadrilatère et soit  $t$  une transformation projective qui envoie un carré standard sur ce quadrilatère. Construire l'image  $DCEF$  du carré standard adjacent.



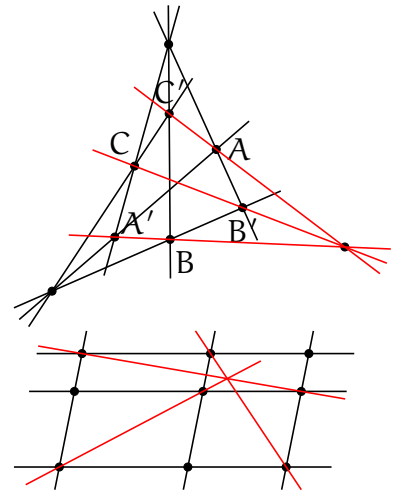
**Exercice 28.** Considérons un pentagone dans le plan. Montrer que le pentagone formé par ces diagonales est projectivement équivalent au pentagone initial.

**Exercice 29.** Construire la droite entre deux points avec une règle courte.

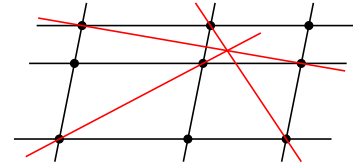
**Exercice 30.** Formuler le théorème dual au théorème de Pappus.

**Exercice 31.** Formuler le théorème dual au théorème de Desargues.

**Exercice 32.** Soient deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  tels que les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourants et les droites  $AB'$ ,  $BC'$  et  $CA'$  sont concourant. Montrer que  $AC'$ ,  $BA'$  et  $CB'$  sont aussi concourants.



**Exercice 33.** Soient  $l_1, l_2, l_3$  et  $m_1, m_2, m_3$  deux triplets de droites parallèles et soient  $A_{ij} = l_i \cap l_j$ . Montrer que les droites  $A_{11}A_{22}$ ,  $A_{13}A_{32}$  et  $A_{31}A_{23}$  sont concourants.



**Exercice 34.** Tracer les configuration duale à

- Ensemble de droites parallèles  $\{y = n | n \in \mathbb{Z}\}$ .
- Quatre droite est six point d'intersections.

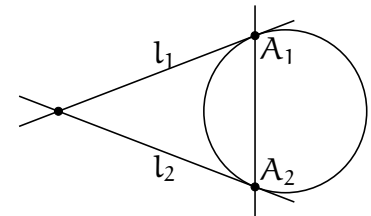
**Exercice 35.** Soit  $X$  un convexe dans un plan projectif.

- Montrer que l'ensemble de droites disjointes avec  $X$  est dual à un convexe dans le plan projectif dual.
- Trouver cet ensemble dans le cas où  $X$  est un triangle.

**Exercice 36.** Soit  $Q$  une conique dans un plan projectif. Trouver la courbe formée par les tangents à  $Q$  dans le plan dual.

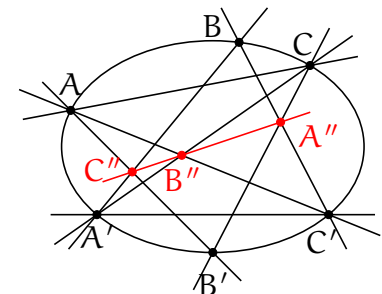
**Exercice 37.** Soit  $Q$  un cercle,  $l_1$  et  $l_2$  deux tangentes dans les points  $A_1$  et  $A_2$ , respectivement. Tracer l'image de cette configuration par la transformation projective que envoie

- la droite  $l_1$  à l'infini.
- la droite  $A_1A_2$  à l'infini.



**Exercice 38.** Soient  $A, B, C_1, \dots, C_4$  six points distincts sur une conique. Montrer que les birapports des droites  $AC_i$  et  $BC_i$  sont égaux.

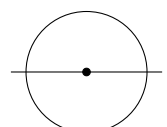
**Exercice 39. Théorème de Pascal.** Soient  $A, B, C$  et  $A', B', C'$  deux triplets de points sur une conique. Alors les points d'intersection  $A'' = BC' \cap B'C$ ,  $B'' = CA' \cap C'A$  et  $C'' = AB' \cap A'B$  sont alignés.



**Exercice 40. Théorème de Brianchon.** Formuler le théorème dual au théorème de Pascal.

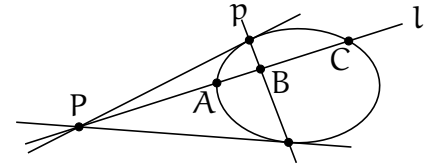
**Exercice 41\***

- Soit  $A$  un point à l'intérieur d'une conique  $q$  et  $l$  une droite passant par  $a$ . Montrer qu'il existe une transformation projective qui envoie  $q$  vers le cercle unité,  $A$  vers l'origine et  $l$  vers l'axe des abscisses.



- b. Soit  $h$  est une homographie d'une conique  $Q$ . Montrer qu'il existe une extension unique de  $h$  au plan projectif.
- c. Trouver les homographies du plan projectif préservant le cercle unité correspondant au homographies du cercle unité  $z \rightarrow z + 1$ ,  $z \rightarrow 1/z$  et  $z \rightarrow \lambda z$ .

**Exercice 42.** Soient  $Q$  une conique,  $P$  un point disjoint de  $Q$  et  $p$  sa polaire par rapport à  $Q$ . Soit  $l$  une droite passant par  $P$  et soient  $A$ ,  $C$  et  $B$  les points d'intersection de  $l$  avec  $Q$  et  $p$ , respectivement. Trouver le birapport  $[P, A, B, C]$ .



**Exercice 43.** Trouver la polaire d'un point par rapport à une conique dégénérée.

**Exercice 44.** *Théorème de Lamé.* Montrer que les polaires d'un point par rapport à un faisceau de coniques sont concourants.

**Exercice 45.** Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscrit dans une conique  $q$ . Soient  $l_A, \dots, l_D$  les tangents à la conique dans les points respectifs. Montrer que les points  $(AB) \cap (CD)$ ,  $(BC) \cap (DA)$ ,  $l_A \cap l_C$  et  $l_B \cap l_D$  sont alignés.

**Exercice 46.**

- a. Écrire l'équation du faisceau des coniques passant par les points  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$  et  $(0, -1)$ . Combien de coniques de ce faisceau sont dégénérées. Traces les.
- b. La même question pour les points  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, \infty)$ .

**Exercice 47.** Soit  $ABCDE$  cinq points dans le plan. Construire la tangente en  $A$  à la conique passant par  $ABCDE$ .

**Exercice 48.** On donne quatre droites en position générale dans un plan affine. Montrer qu'il existe une et une seule parabole tangente à ces quatre droites.

**Exercice 49.** Trouver la limite du théorème de Brianchon quand l'hexagone se dégénère en quadrilatère.

**Exercice 50.** Construire les points de tangence d'un pentagone avec la conique inscrite.