TD 1 - Courbes et dérivées

Exercice 1. Tracer les courbes paramétrées suivantes :

a. $x = 2t,\ y = 3t.$

b. $x = 2t^2,\ y = 3t^2.$

c. $x = t,\ y = t^2.$

d. $x = t,\ y = t^3.$

e. $x = t^2,\ y = t^3.$

f. $x = t^2 - 1,\ y = t^3 - t.$

g. $x = \sin(t),\ y = \cos(t).$

h. $x = \mathrm{sh}(t),\ y = \mathrm{ch}(t).$

i. $x = \dfrac{2t}{1+t^2},\ y = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$

j. $x = \dfrac{2t}{1-t^2},\ y = \dfrac{1+t^2}{1-t^2}.$

k. $r = t,\ \phi = t.$

l. $r = \sqrt{1+t^2},\ \phi = \mathrm{arctg}(t).$

m. $r = e^t,\ \phi = t.$

Exercice 2. *Sans paramétrage.* Tracer les courbes non-paramétrées dans les coordonnées cartésiennes et polaires respectivement.

a. $2x + 3y = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4 = 0$

c. $x^2 - y^2 - 4 = 0$

d. $y^2 - x(x-1)(x-2) = 0$

e. $y^2 - x^2(x+1) = 0$

f. $y^2 - x^3 - 1 = 0$

g. $y^2 - x^3 = 0$

h. $r = e^\phi$

i. $r = 2\phi$

j. $r = \sqrt{\cos 2\phi}$

k. $r = 1 + \cos\phi$

Exercice 3. *Cycloïde.*

Une cycloïde est la courbe tracée par un point sur un cercle quand celui-ci roule sur une droite. Supposons que le rayon du cercle mesure a et qu'il roule sur l'axe des abscisses. Soit $p(t)$ le point sur le cercle avec $t \in \mathbb{R}$ le temps et supposons que $p(0)$ est l'origine. Trouver l'équation de la cycloïde décrite par le point $p(t)$.

Exercice 4. *Coordonnées sphériques et cylindriques*

Trouver les équations de changement de coordonnées entre les coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) et les coordonnées cylindriques (r, θ, z).

Exercice 5. *Quelques limites*

Déterminer si les limites suivantes existent-elles.

a. $\lim_{(x,yz)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$.

b. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2-y^2}$.

c. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{y+x^2}$.

Exercice 6. Trouver la matrice jacobienne Df_p dans les cas suivants :

a. $f(x,y) = \frac{x}{y}$ et $p = (3,2)$.

b. $f(x,y,z) = (2x - 3y + 5z, x^2 + y, \ln(yz))$ et $p = (3,-1,-2)$.

c. $f(x,y,z) = (xy^2z^3, \sqrt{x^2+y^2+z^2})$ et $p = (1,0,-2)$.

Exercice 7. *Dérivées partielles.*

Soit $f(x,y) = ye^{3x}$. Trouver des formules pour $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ et $\dfrac{\partial^n f}{\partial y^n}$.

Exercice 8. *Contre-exemple au théorème de Schwarz ?*

a. Calculer les dérivées partielles de

$$F(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ et $F(0,0) = 0$.

b. Calculer les dérivées partielles mixtes

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) \text{ et } \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)$$

pour $(x,y) = (0,0)$

Exercice 9. *Règle de la chaîne.*

Calculer $D(f \circ g)$ dans chaque cas. Il y a deux façons de faire, comparez les résultats.

a. $f(x) = (3x^5, e^{2x})$, $g(s,t) = s - 7t$.

b. $f(x,y) = x^2 - 3y^2$, $g(s,t) = (st, s + t^2)$.

c. $f(x,y) = (xy - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} + y^3)$, $g(s,t) = (\frac{s}{t}, s^2t)$.

d. $f(x,y) = (xy^2, x^2y, x^3 + y^3)$, $g(t) = (\sin t, e^t)$.

Exercice 10. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable telle que $g(1,-1,3) = (2,5)$ et

$$Dg_{(1,-1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction $f(x,y) = (2xy, 3x - y + 5)$. Calculer $D(f \circ g)_{(1,-1,3)}$.

Exercice 11. Nous allons étudier la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a. Utiliser des coordonnées polaires pour décrire cette fonction.

b. Dessiner quelques courbes de niveau de f.

c. Déterminer si la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Est-ce que f est continue ?

Exercice 12. Soit

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(xy+x^2)}{x^4+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que les fonctions $a(x) = g(x,0)$ et $b(y) = g(0,y)$ sont continues en 0, mais que g ne l'est pas.

Exercice 13. Soit $z = g(x,y)$ une fonction de classe C^∞ et $x = e^r \cos\theta$, $y = e^r \sin\theta$.

a. Utiliser la règle de chaîne pour trouver des expressions pour $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ en termes de $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

b. Utiliser (a) pour montrer que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-2r}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}\right).$$

Exercice 14. Considérons la surface $z^2 = x^2 + y^2$.

a. Trouver l'équation pour le plan tangent à la surface au point $(3, -4, 5)$.

b. Trouver l'équation pour le plan tangent à la surface au point (a, b, c).

c. Montrer que tout plan tangent à la surface contient l'origine.