Université de Strasbourg
Mathématiques

Feuille 2

L3 Math
Analyse complexe
2022-2023

Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes, logarithme, fonctions usuelles

Exercice 1 –Soit $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme. Que valent les parties réelles et imaginaires de $\mathrm{Log}(z)$? Expliquer pourquoi la fonction $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ ne s'étend continûment en aucun point de la demi-droite $\mathbb{R}^-$.

Exercice 2 –Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application. On écrit $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$, et on définit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par $\tilde{f}(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$.

1. Nous avons vu en cours que si f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0). En reprenant cette preuve, exprimer la matrice jacobienne de $\tilde{f}$ en (x_0, y_0) en fonction des parties réelles et imaginaires de $f'(z_0)$, puis en fonction du module et de l'argument de $f'(z_0)$.
2. On admet momentanément que les fonctions holomorphes sont de classe C^1 (ce sera démontré dans deux semaines en cours). Montrer que si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est holomorphe et bijective, et si $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_1$, alors la bijection réciproque $g : \Omega_2 \to \Omega_1$ est holomorphe (on pourra appliquer le théorème d'inversion globale...). Exprimer la dérivée de g en fonction de celle de f.
3. Considérons la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{n^2+1} z^n$. Montrer que cette série définit une fonction holomorphe f sur le disque $D(0;1)$, puis qu'il existe une fonction holomorphe h définie sur un ouvert contenant 0, telle que l'identité $h \circ f(z) = z$ a lieu pour z dans un petit disque centré en 0.

Exercice 3 –Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Re}(z)| < 1\}$. Montrer que l'image de Ω par $z \mapsto z^2 - 1$ ne rencontre pas $\mathbb{R}_+$. En déduire qu'il existe exactement deux fonctions holomorphes sur Ω satisfaisant $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Exercice 4 –On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.
Soit $B = \{it \mid t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$, et $\Omega := \mathbb{C} \setminus B$.

1. Montrer que l'application $f : z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ définit une bijection holomorphe de Ω sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, dont on explicitera la bijection réciproque.
2. Soit Log la détermination principale du logarithme. Montrer que $g : z \mapsto \frac{1}{2i}\mathrm{Log}(\frac{1+iz}{1-iz})$, $z \in \Omega$, satisfait l'identité $\tan(g(z)) = z$.

Intégrer le long d'un chemin

Exercice 5 –

1. Soient $k \in \mathbb{Z}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. Intégrer la fonction $z \mapsto z^m$ sur le chemin $\gamma : [0, k\pi] \to \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = e^{it}$.
2. Intégrer $z \mapsto e^z$ sur le segment reliant 0 à $1 + i\frac{\pi}{3}$.
3. Intégrer la fonction $z \mapsto \cos(z)$ sur le segment reliant i à $2i$.

Exercice 6 –Soit Log : $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \to \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme. On définit pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}\text{Log}(z)}$. Soit γ le chemin paramétré par $t \mapsto e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

Exercice 7 –Soit $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que:

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^2} \int_{C(0,r)} f(z)dz = 0.$$

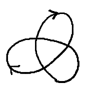
Exercice 8 –**[Indice d'un point par rapport à un lacet.]**
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé (on dit aussi *un lacet*), que l'on suppose de classe C^1. Soit γ^* le support de γ et $z \notin \gamma^*$. On appelle indice de z par rapport à γ, et on note $Ind_\gamma(z)$ la quantité:

$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

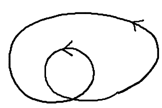
1. On suppose que γ est le cercle de centre c et de rayon $r > 0$, paramétré par $t \mapsto c + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer $Ind_\gamma(c)$.
2. On revient au cas général d'un chemin fermé $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, et on pose pour tout $t \in [a,b]$, $\varphi(t) = \exp(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\, ds)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$. En déduire que $\varphi(b) = 1$, puis que $Ind_\gamma(z)$ **est un nombre entier**.
4. La conclusion change-t-elle si γ est seulement supposé C^1 par morceaux?
5. Montrer que $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
6. Montrer que $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
7. Montrer que γ^* est contenu dans un disque de rayon assez grand, et en déduire que $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ possède une unique composante connexe non bornée, notée Ω_{nb}. Montrer que $Ind_\gamma(z) = 0$ pour tout z dans Ω_{nb}.
8. On reprend l'exemple de γ le cercle de centre c et de rayon $r > 0$. Calculer $Ind_\gamma(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Exercice 9 –Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé.

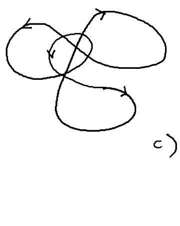
1. On suppose que l'on peut écrire $\gamma(s) = z_0 + r(s)e^{2\pi i\theta(s)}$, où $r : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont de classe C^1. Montrer que $Ind_\gamma(z_0) = \theta(b) - \theta(a)$.
2. S'aider du résultat précédent pour déterminer les indices des points du plan par rapport aux lacets ci-dessous.



a)



b)



c)