

Propriétés élémentaires des fonctions holomorphes, logarithme, fonctions usuelles

Exercice 1 – Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une application. On écrit $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, et on définit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\tilde{f}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$.

1. Nous avons vu en cours que si f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$, alors \tilde{f} est différentiable en (x_0, y_0) . En reprenant cette preuve, exprimer la matrice jacobienne de \tilde{f} en (x_0, y_0) en fonction des parties réelles et imaginaires de $f'(z_0)$, puis en fonction du module et de l'argument de $f'(z_0)$.
2. On admet momentanément que les fonctions holomorphes sont de classe C^1 (ce sera démontré dans deux semaines en cours). Montrer que si $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ est holomorphe et bijective, et si $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega_1$, alors la bijection réciproque $g : \Omega_2 \rightarrow \Omega_1$ est holomorphe (on pourra appliquer le théorème d'inversion globale...). Exprimer la dérivée de g en fonction de celle de f .

Exercice 2 – Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z)| < 1\}$. Montrer que l'image de Ω par $z \mapsto z^2 - 1$ ne rencontre pas \mathbb{R}_+ . En déduire qu'il existe exactement deux fonctions holomorphes sur Ω satisfaisant $f(z)^2 = z^2 - 1$.

Exercice 3 – On définit pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Soit $B = \{it \mid t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$, et $\Omega := \mathbb{C} \setminus B$.

1. Montrer que l'application $f : z \mapsto \frac{1+iz}{1-iz}$ définit une bijection holomorphe de Ω sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, dont on explicitera la bijection réciproque.
2. Soit Log la détermination principale du logarithme. Montrer que $g : z \mapsto \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, $z \in \Omega$, satisfait l'identité $\tan(g(z)) = z$.

Intégrer le long d'un chemin

Exercice 4 –

1. Soient $k \in \mathbb{Z}^*$ et $m \in \mathbb{Z}$. Intégrer la fonction $z \mapsto z^m$ sur le chemin $\gamma : [0, k\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ donné par $\gamma(t) = e^{it}$.
2. Intégrer $z \mapsto e^z$ sur le segment reliant 0 à $1 + i\frac{\pi}{3}$.
3. Intégrer la fonction $z \mapsto \cos(z)$ sur le segment reliant i à $2i$.

Exercice 5 – Soit $\operatorname{Log} : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{C}$ la détermination principale du logarithme. On définit pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z)}$. Soit γ le chemin paramétré par $t \mapsto e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Calculer $\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}}$.

Exercice 6 – Soit $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{C(0,r)} f(z) dz = 0.$$

Exercice 7 – [Indice d'un point par rapport à un lacet.]

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé (on dit aussi *un lacet*), que l'on suppose de classe C^1 . Soit γ^* le support de γ et $z \notin \gamma^*$. On appelle indice de z par rapport à γ , et on note $Ind_\gamma(z)$ la quantité:

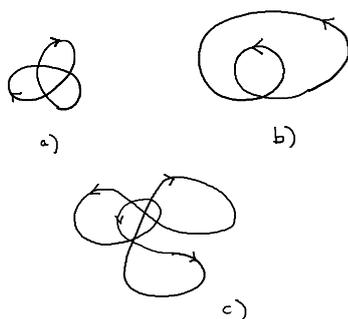
$$Ind_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}.$$

1. On suppose que γ est le cercle de centre c et de rayon $r > 0$, paramétré par $t \mapsto c + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer $Ind_\gamma(c)$.
2. On revient au cas général d'un chemin fermé $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, et on pose pour tout $t \in [a, b]$, $\varphi(t) = \exp(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z} ds)$.
3. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t)-z}$. En déduire que $\varphi(b) = 1$, puis que $Ind_\gamma(z)$ est un nombre entier.
4. La conclusion change-t-elle si γ est seulement supposé C^1 par morceaux?
5. Montrer que $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
6. Montrer que $z \mapsto Ind_\gamma(z)$ est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
7. Montrer que γ^* est contenu dans un disque de rayon assez grand, et en déduire que $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ possède une unique composante connexe non bornée, notée Ω_{nb} . Montrer que $Ind_\gamma(z) = 0$ pour tout z dans Ω_{nb} .
8. On reprend l'exemple de γ le cercle de centre c et de rayon $r > 0$. Calculer $Ind_\gamma(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$.
9. On suppose que γ_1 et γ_2 sont deux lacets paramétrés par $[a, b]$. Montrer que si $|\gamma_1(t)| < |\gamma_2(t)|$ pour tout $t \in [a, b]$, alors

$$Ind_{\gamma_1 + \gamma_2}(0) = Ind_{\gamma_2}(0).$$

Exercice 8 – Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin fermé.

1. On suppose que l'on peut écrire $\gamma(s) = z_0 + r(s)e^{2\pi i \theta(s)}$, où $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 . Montrer que $Ind_\gamma(z_0) = \theta(b) - \theta(a)$.
2. S'aider du résultat précédent pour déterminer les indices des points du plan par rapport aux lacets



ci-dessous.