Université de Strasbourg
Mathématiques

L3 Math
Analyse complexe
2023-2024

Feuille 3

Exercice 1 –Soit $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ définie sur $\mathbb{C}^*$.

1. La fonction f admet-elle une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}^*$?(on pourra considérer l'intégrale de f le long de cercles centrés en 0).
2. Déduire de la question précédente qu'il n'existe pas de détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire aucune fonction holomorphe $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $e^{\varphi(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 2 –Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe qui ne s'annule pas. On suppose que $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ admet une primitive holomorphe, notée F. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $G : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $e^{G(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 3 –Montrer que la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z^2 - z}$ n'admet pas de primitive holomorphe sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C} | \ 0 < |z-1| < 1\}$ (on pourra écrire $f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$ et intégrer le long d'un lacet bien choisi).

Exercice 4 –L'objet de cet exercice est de démontrer l'égalité

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \pi.$$

1. Montrer que pour $R > 0$
$$\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x} \, dx = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix} - 1}{ix} \, dx.$$
2. Montrer que $z \mapsto \frac{e^{iz}-1}{iz}$, qui ne fait sens que pour $z \neq 0$, est en fait la restriction à $\mathbb{C}^*$ d'une fonction g holomorphe sur $\mathbb{C}$ (utiliser les séries entières). Montrer que g admet une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}$.
3. Soit γ le chemin fermé obtenu en concaténant le segment $[-R, R]$ et le demi-cercle supérieur de diamètre $[-R, R]$. Calculer $\int_\gamma g(z) dz$. En faisant tendre R vers $+\infty$, montrer que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$ converge et vaut π.

Exercice 5 –Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1, parcouru une fois dans le sens trigonométrique. En faisant le minimum de calculs possible, déterminer les intégrales suivantes:

1. $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$, avec $n \geq 1$.
2. $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$.
3. $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$.
4. $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2} dz$.

Exercice 6 –Calculer les intégrales suivantes (on pourra éventuellement utiliser une formule de Cauchy):

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^2+1} dz, \quad \int_{|z+i|=1} \frac{e^z}{z^2+1} dz, \quad \int_{|z|=3} \frac{\cos(\pi z)}{z^2-1} dz.$$

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3}\,dz, \quad \int_{|z-2|=1} \frac{z^7+2}{z^2(z^4+1)}\,dz, \quad \int_{|z-1|=3/2} \frac{z^7+2}{z^2(z^4+1)}\,dz.$$

Exercice 7 –Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorphe. Soit C le cercle unité, que l'on parcours une fois dans le sens trigonométrique.

1. Calculer $\int_C (2 + z + \frac{1}{z}) \frac{f(z)}{z} dz$.
2. Déduire que $\int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cos^2(\frac{t}{2}) dt = \pi f(0) + \frac{\pi}{2} f'(0)$.

Exercice 8 –Soit A un réel strictement positif. On considère le triangle T dont les sommets sont 0, A, $A(1+i)$. On note que ∂T est parcouru dans le sens trigonométrique. On rappelle que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

1. Que vaut $\int_{\partial T} e^{-z^2} dz$?
2. Montrer que $\lim_{A \to +\infty} \int_0^1 Ae^{-A^2(1-t^2)} dt = 0$ (on pourra essayer d'appliquer le th. de convergence dominée, en majorant $Ae^{-A^2(1-t^2)}$ indépendamment de A).
3. En faisant tendre A vers $+\infty$, montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales généralisées suivantes (intégrales de Fresnel):
$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt, \text{ et } \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt.$$

Exercice 9 –

1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose qu'il existe $p \in \Omega$ tel que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus \{p\}$. Montrer qu'alors f est holomorphe sur Ω (on pourra utiliser le théorème de Morera).
2. On suppose toujours que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose de plus qu'il existe une droite Δ telle que f soit holomorphe sur $\Omega \setminus \Delta$. Montrer que f est alors holomorphe sur Ω.

Exercice 10 –Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert étoilé.

1. Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas, alors $z \mapsto \frac{f'(z)}{f(z)}$ admet une primitive holomorphe sur Ω. En déduire qu'il existe une fonction holomorphe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $e^h = f$.
2. De la question précédente, déduire que si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et ne s'annule pas, il existe pour tout $n \geq 2$ une détermination holomorphe de la racine n-ième de f.

Exercice 11 –Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert, que l'on suppose connexe. Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une application continue. On suppose que pour tout chemin fermé γ tracé dans Ω, on a:
$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$
On se fixe $c \in \Omega$.

1. Soit $z \in \Omega$. Soit γ un chemin tracé dans Ω, d'origine c et d'extrémité z. On pose $F(z) = \int_\gamma f(\xi) d\xi$. Montrer que $F(z)$ ne dépend pas du choix du chemin γ reliant c à z.
2. Soit $z_0 \in \Omega$. Soit $r > 0$ assez petit pour que $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$. Montrer que pour tout $z \in D(z_0, r)$, on a:
$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) = \frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0 z]} (f(\xi) - f(z_0)) d\xi.$$
3. En déduire que F est holomorphe sur Ω, de dérivée f, et conclure qu'en particulier, f est holomorphe.