

CC2 L3 MAGISTÈRE
UE "MÉTHODES ANALYTIQUES EN ANALYSE" 2025-26

On note \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. On rappelle la formule de Stirling $n! \sim (n/e)^n (2\pi n)^{1/2}$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour $x \geq 1$, on note $\theta(x) := \sum_{p \in \mathcal{P}: p \leq x} \log p$.

(Q1) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\prod_{p \in \mathcal{P}: n < p \leq 2n} p$ divise C_{2n}^n .

(Q2) En déduire l'existence d'une suite $(\alpha_n)_n$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ et

$$\forall n \geq 1 : \frac{\theta(2n)}{2n} \leq \frac{1}{2} \frac{\theta(n)}{n} + \log 2 + \alpha_n.$$

(Q3) Si $u = (u_k)_k$ est une suite à valeurs réelles admettant une limite l , et si $v := (v_k)_k$ est définie par $v_{k+1} = (1/2)v_k + u_k$ et sa valeur initiale v_0 , montrer que v converge vers une limite indépendante de v_0 .

(Q4) Montrer que la suite $w = (w_k)_k$ définie par $w_{k+1} := (1/2)w_k + \log 2 + \alpha_{2^k}$ et $w_0 := 0$ est convergente, préciser sa limite.

(Q5) Montrer que la suite $k \mapsto \theta(2^k)/2^k$ est bornée, puis que la suite $n \mapsto \theta(n)/n$ est bornée.

(Q6) Pour $x \geq 1$, on note $\pi(x) := \sum_{p: p \leq x} 1$. Montrer l'encadrement

$$\frac{\pi(x) \log \xi}{x} - \frac{\xi \log \xi}{x} \leq \frac{\theta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x) \log x}{x}$$

pour tout $\xi \in [1, x]$

(Q7*) Donner un exemple d'une fonction $\xi(x)$ telle que $\frac{\log \xi(x)}{\log x} \rightarrow 1$ and $\frac{\xi(x) \log \xi(x)}{x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \infty$.

(Q8*) Montrer le caractère borné de la suite $n \mapsto \pi(n) \log(n)/n$.