Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique

Charles Frances

13 Novembre 2002

1 Introduction

Le théorème de Liouville est un résultat fondamental de géométrie conforme, que l'on peut énoncer comme suit:

Théorème 1 (Liouville). *Une application conforme entre ouverts de* $\mathbf{R}^n$ *(*$n \geq 3$*) est obtenue comme restriction d'une composée de similitudes et d'inversions.*

On obtient comme corollaire que tout difféomorphisme conforme entre deux ouverts de la sphère $\mathbf{S}^n$ est la restriction d'un (unique) difféomorphisme conforme *global* de $\mathbf{S}^n$. Ce résultat peut aussi se voir comme une manifestation particulière d'un phénomène général : la rigidité des applications conformes en dimension supérieure ou égale à trois (une exposition très générale de ces propriétés de rigidité est donnée dans [St]). On dispose de nombreuses démonstrations du théorème de Liouville (voir entre autres [Sp] [J] ou [M]) et dans la plupart des cas, elles s'articulent en deux parties. On commence par montrer que si un difféomorphisme f entre ouverts de $\mathbf{R}^n$ est conforme, il envoie localement les (n-1)-sphères sur des (n-1)-sphères (cela signifie que tout point du domaine de définition de f possède un voisinage tel que toute (n-1)-sphère incluse dans ce voisinage est envoyée par f sur une (n-1)-sphère). Une fois ce fait établi, on conclut de façon classique grâce à un lemme dû à Möbius.

Lemme 2 (Möbius). *Si une application* f *entre deux ouverts* U *et* V *de* $\mathbf{R}^n$ *envoie localement les (n-1)-sphères de* U *sur des (n-1)-sphères de* V*, alors* f *est la restriction à* U *d'une composée de similitudes et d'inversions.*

Nous renvoyons à [Sp] (*volume 3, p 310*) pour une preuve de ce lemme. Précisons que le coeur de la démonstration du théorème de Liouville réside vraiment dans la première étape, consistant à prouver qu'un difféomorphisme conforme envoie localement les (n-1) sphères sur des (n-1) sphères. Ce résultat est généralement obtenu par des calculs et il est difficile d'isoler une raison conceptuelle pour laquelle il est vrai. Aussi se propose-t-on de faire le lien entre cette propriété et un résultat profond mais *a priori* sans rapport : l'invariance conforme des géodésiques isotropes en géométrie pseudo-riemannienne ou riemannienne complexe.

Notre preuve s'applique à des transformations conformes analytiques entre ouverts de $\mathbf{R}^n$. Les preuves classiques (par exemple [M]) requièrent en général une régularité C^3 et on peut trouver dans [H] une preuve plus difficile qui traite le cas des applications de classe C^1.

2 Invariance conforme des géodésiques isotropes

Rappelons qu'une métrique pseudo-riemannienne g sur une variété M est la donnée d'une forme quadratique non dégénérée de signature (p, q) sur chaque espace tangent à M. Nous supposons par la suite que g n'est pas riemannienne, c'est-à-dire que ni p ni q ne sont nuls.

Une géodésique $t \mapsto c(t)$ pour la métrique g est qualifiée d'isotrope si pour tout t où $c(t)$ est défini, on a $g_{c(t)}(c'(t), c'(t)) = 0$. Si l'on se donne une métrique g' dans la classe conforme de g (c'est à dire $g' = e^\sigma g$ pour σ une fonction de M dans $\mathbf{R}$ de même régularité que g), les géodésiques de g' et de g n'ont en général aucun rapport. Néanmoins, on peut montrer le:

Théorème 3. *Soit (M, g) une variété pseudo-riemannienne, alors les géodésiques isotropes sont les mêmes, en tant que lieux géométriques, pour toutes les métriques de la classe conforme de g.*

Remarquons que ce théorème ne dit pas que les géodésiques isotropes sont les mêmes en tant que courbes paramétrées.

Preuve : Nous rappelons sommairement comment on peut voir le flot géodésique sur une variété comme un flot hamiltonien (le lecteur souhaitant plus de détails peut se référer à [AM]). On note $T^\star M$ le fibré cotangent de M et ω la forme symplectique standard sur $T^\star M$. La donnée d'une métrique pseudo-riemannienne g sur M fournit en tout point x de M un isomorphisme i_x de $T_x^\star M$ dans $T_x M$. On peut alors associer à la métrique g un Hamiltonien H sur $T^\star M$ donné par $H(x, \zeta) = g_x(i_x(\zeta), i_x(\zeta))$, ainsi qu'un gradient symplectique X vérifiant $d_{(x,\zeta)}H(\ ) = \omega_{(x,\zeta)}(X,\ )$. Les projections sur M des trajectoires du flot ϕ^t associé au champ X sont les géodésiques de la métrique g. On peut faire la même construction avec une métrique g' dans la classe conforme de g, et on obtient ainsi un Hamiltonien H' et un gradient symplectique X'. Comme g et g' sont conformément équivalentes, pour tout x dans M et tout ζ dans $T_x^\star M$, les vecteurs $i_x(\zeta)$ et $i'_x(\zeta)$ sont colinéaires, et par conséquent, les lieux d'annulation de H et H' sont les mêmes. Ils consistent en une hypersurface singulière $\Sigma_0 \subset T^\star M$, qui est laissée invariante par l'action des flots ϕ^t et ${\phi'}^t$. Notons que les points où Σ_0 est régulière sont exactement le complémentaire dans Σ_0 de la section nulle. Maintenant, on remarque qu'en un point (x, ζ) où Σ_0 est régulière, les vecteurs $X(x, \zeta)$ et $X'(x, \zeta)$ sont tous deux orthogonaux, pour la forme ω, à l'espace tangent en (x, ζ) à Σ_0. Comme ω est non dégénérée et que $T_{(x,\zeta)}\Sigma_0$ est de codimension 1 dans $T_{(x,\zeta)}(T^\star M)$, c'est qu'ils sont colinéaires. On en conclut que X et X' sont toujours colinéaires sur Σ_0 puisqu'ils le sont sur un ouvert dense de Σ_0. Par conséquent, les trajectoires des flots ϕ^t et ${\phi'}^t$ sur Σ_0 sont identiques en tant que lieux géométriques, ce qui achève la preuve. $\square$

En fait, on peut étendre ce théorème à d'autres cadres. Considérons par exemple une variété complexe M munie d'une métrique riemannienne holomorphe g (c'est-à-dire d'un champ holomorphe de formes quadratiques complexes non dégénérées sur M). On peut définir la classe conforme de g comme l'ensemble des métriques de la forme λg avec λ une fonction holomorphe de M dans $\mathbf{C}$ qui ne s'annule pas. Il existe de même une notion de géodésiques pour la métrique g, qui seront des courbes *à paramètre complexe* $z \mapsto c(z)$. On définit les géodésiques isotropes comme précédemment. Avec ces définitions, la démonstration du théorème 3 s'adapte au cadre complexe et on peut affirmer que les géodésiques isotropes de toutes les métriques de la classe conforme de g sont identiques, en tant que lieux géométriques.

On peut maintenant énoncer le

Corollaire 4. *Une application conforme entre deux variétés pseudo-riemanniennes (resp. entre deux variétés complexes munies de structures riemanniennes holomorphes) M et N envoie les géodésiques isotropes de M sur les géodé siques isotropes de N.*

3 Une application: le théorème de Liouville dans le cas analytique

Nous allons maintenant appliquer la propriété d'invariance conforme des géodésiques isotropes au cadre riemannien. Cela semble un petit peu incongru puisque dans ce cas, bien sûr, il n'y a pas de courbes isotropes. Néanmoins, lorsque la variété considérée est analytique, un bon moyen d'en faire apparaître est de tout complexifier. Aussi commençons-nous par quelques rappels sur la complexification.

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un point de $\mathbf{R}^n$ et $B(x, r)$ la boule euclidienne ouverte de centre x et de rayon r. On note$\hat{B}(x, r)$ la boule ouverte de $\mathbf{C}^n$ de centre x et de rayon r. Considérons une série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+...+\alpha_n=i} b_{\alpha_1...\alpha_n}(x_1 - a_1)^{\alpha_1}...(x_n - a_n)^{\alpha_n}$$

qui converge pour tout $(x_1, ..., x_n)$ de $B(a, r)$.
Alors la série

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\alpha_1+...+\alpha_n=i} b_{\alpha_1...\alpha_n}(z_1 - a_1)^{\alpha_1}...(z_n - a_n)^{\alpha_n}$$

converge pour tout $(z_1, ..., z_n)$ de $\hat{B}(a, r)$.

Maintenant, si f est une application analytique définie sur un ouvert connexe U de $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, on peut la complexifier sur des boules de rayon assez petit dans U. Cela permet de définir une extension globale $\hat{f}$ de f à un ouvert $\hat{U}$ de $\mathbf{C}^n$ contenant U.

Lorsque f est une application analytique à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut également la complexifier en appliquant le

procédé précédent à chaque fonction coordonnée (l'ouvert $\hat{U}$ n'est a priori pas le même pour toutes les fonctions coordonnées mais comme elles sont en nombre fini, on peut en trouver un commun). Ainsi, n'importe quel tenseur analytique (métrique pseudo-riemannienne, structure conforme, structure symplectique) défini sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ peut se complexifier en un tenseur holomorphe sur un ouvert de $\mathbf{C}^n$. Par analyticité, certaines propriétés se conservent lors de la complexification. Par exemple toute application conforme analytique f de (U, g) dans (V, g') se complexifie en $\hat{f}$ conforme et holomorphe de $(\hat{U}, \hat{g})$ dans $(\hat{V}, \hat{g}')$.
Nous allons à présent montrer la proposition suivante, qui donne directement le théorème de Liouville grâce au lemme de Möbius. On note g_{can} la métrique euclidienne sur $\mathbf{R}^n$.

Proposition 5. *Pour $n \geq 3$, une application f conforme et analytique entre deux ouverts U et V de $(\mathbf{R}^n, g_{can})$ envoie localement les (n-1)-sphères de U sur les (n-1)-sphères de V.*

Preuve : L'application f est analytique : on peut donc la complexifier en $\hat{f}$ de $\hat{U}$ sur $\hat{V}$. De même, la métrique canonique restreinte à U et à V se complexifie en $\hat{g}_{can}$ sur $\hat{U}$ et $\hat{V}$ (c'est en fait la restriction à ces deux ouverts de la forme quadratique complexe $z_1^2 + ... + z_n^2$). Le corollaire 4 permet d'affirmer que $\hat{f}$ envoie les géodésiques isotropes de $(\hat{U}, \hat{g}_{can})$ sur les géodésiques isotropes de $(\hat{V}, \hat{g}_{can})$. Or les géodésiques pour la métrique $\hat{g}_{can}$ sont les droites complexes affines de $\mathbf{C}^n$, c'est-à-dire les courbes $z \mapsto a + bz$ avec a et b dans $\mathbf{C}^n$. Par conséquent, si $u = (u_1, ..., u_n)$ appartient à $\hat{U}$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ est l'image de u par $\hat{f}$, alors $\hat{f}$ doit envoyer l'intersection du cône C_u d'équation $\sum_{j=1}^n (z_j - u_j)^2 = 0$ avec $\hat{U}$ sur l'intersection du cône C_v d'équation $\sum_{j=1}^n (z_j - v_j)^2 = 0$ avec $\hat{V}$.
On note, pour tout j, $u_j = u_{1j} + iu_{2j}$ et on prend $x = (x_1, ..., x_n)$ un point de $C_u \cap \mathbf{R}^n$. Ce point doit vérifier $\sum_{j=1}^n (x_j - u_j)^2 = 0$, ce qui se traduit par deux conditions.
La première s'écrit $\sum_{j=1}^n (x_j - u_{1j})^2 = \sum_{j=1}^n u_{2j}^2$ et indique que x appartient à la (n-1)-sphère de centre $p_u = (u_{11}, ..., u_{1n})$ et de rayon $(u_{21}^2 + ... + u_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$.
La seconde s'écrit $\sum_{j=1}^n u_{2j}(x_j - u_{1j}) = 0$ et dit que x appartient à l'hyperplan affine passant par p_u et orthogonal à la direction $(u_{21}, ..., u_{2n})$. Ainsi $C_u \cap \mathbf{R}^n$ est une (n-2)-sphère centrée en p_u et de rayon $(u_{21}^2 + ... + u_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$. Comme u est dans $\hat{U}$, le point p_u appartient à U. En faisant décrire à $(u_{21}^2 + ... + u_{2n}^2)^{\frac{1}{2}}$ un petit intervalle autour de 0, on obtient toutes les (n-2)-sphères centrées en p_u de rayon suffisament petit.
Ceci montre qu'il existe un voisinage de p_u tel que toute (n-2)-sphère contenue dans ce voisinage est envoyée par f sur une (n-2)-sphère de V. Par intersection, on en déduit que f envoie localement les cercles sur des cercles, et on conclut la preuve grâce au

Lemme 6. *Un difféomorphisme entre deux ouverts U et V de $\mathbf{R}^n$ qui envoie localement cercles sur cercles, envoie localement (n-1)-sphères sur (n-1)-sphères.*

Preuve : Soit p un point de U. Par hypothèse, il existe un voisinage U_p de p tel que tout cercle inclus dans U_p est envoyé par f sur un cercle. On considère une sphère S incluse dans U_p et on choisit deux points antipodaux x_N et x_S sur S. L'image $\Sigma = f(S)$ est une hypersurface lisse incluse dans V. On choisit ρ une inversion de pôle $f(x_N)$. Comme S est la réunion des cercles de S passant par x_N et x_S, $\rho(\Sigma \backslash \{f(x_N)\})$ est réunion de droites passant par $\rho \circ f(x_S)$. C'est un cône de codimension 1, de sommet $\rho \circ f(x_S)$ et lisse en $\rho \circ f(x_S)$, donc un hyperplan. On en déduit que $\Sigma \backslash \{f(x_N)\}$ est une sphère privée du point $f(x_N)$, ce qui achève la preuve. $\square$

$\square$

Remarque 7. *Dans le cas $n = 2$ la démonstration est mise en défaut puisque $C_u \bigcap \mathbf{R}^2$ est en général réduit à deux points.*

Remerciements
Je remercie vivement Abdelghani Zeghib pour le soutien qu'il a apporté à ce travail, ainsi que le rapporteur pour ses précieuses remarques.

Références

[AM] R.Abraham, J.E.Marsden -*Foundations of mechanics.* Second edition. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978

[H] P.Hartman -*On isometries and on a theorem of Liouville.* Math. Z. 69 1958 202–210.

[J] H.Jacobowitz -*Two notes on conformal geometry.* Hokkaido Math. J. 20 (1991), no. 2, 313–329.

[M] S.Matsumoto - *Foundations of flat conformal structure.* Aspects of low-dimensional manifolds, 167–261, Adv. Stud. Pure Math., 20, Kinokuniya, Tokyo, 1992.

[Sp] M.Spivak - *A comprehensive introduction to differential geometry.* Second edition. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1979.

[St] S.Sternberg -*Lectures on differential geometry.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1964

Charles FRANCES
École Normale Supérieure de Lyon,
UMPA
46, allée d'Italie,
69364 Lyon cedex 07, FRANCE
cfrances@umpa.ens-lyon.fr
http://www.umpa.ens-lyon.fr