Année 2019-2020
Emmanuel Franck Mathématiques Appliquées L3

Informatique S6 - CC1

Le but de ces exercices est de construire une série de modèles pour l'épidémiologie. Le but ne sera pas de les résoudre, juste de les construire.

Exercice 1 (**Modèles épidémiologiques I** (3.5 points)).

*On commence par implémenter une classe générale de modèles appelés **modèles compartimentaux**. Il s'agit de systèmes dynamiques de la forme :*

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$$

avec $\mathbf{X}$ un vecteur de taille N_c. Ces variables correspondent à des compartiments (ou types de population). Le flot de l'équation $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t))$ traduit comment on transit entre les compartiments. A $t = 0$ on suppose que

$$\mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}_0$$

Encore une fois on s'occupera pas de la marche en temps.

Question (**Classe** (2.5 points)).
*Construire une classe **modèles compartimentaux** qui contient N_c, un tableau x0 (pointeur) contenant les N_c variables, 2 réels qui décrivent pour tous les modèles un "taux de mortalité" (τ_m) et "taux de natalité" (τ_n). Donnez les constructeurs (par défaut, par copie et prenant N_c en paramètre), le destructeur, les mutateurs et les accesseurs.*

Question (**Méthodes virtuelles** (1.0 points)). *Ajouter 2 méthodes virtuelles : une nommée R_0 qui renvoit le taux de réplication du modèle (nombre moyen de gens contaminés par un malade) et une appelée : "transition_fonction" qui prend un vecteur x de variable et renvoit un vecteur. Il s'agit de la fonction décrivant $\mathbf{F}$. **On donnera une implémentation vide**.*

Exercice 2 (**Modèle SEIR** (6.0 points)).

On va maintenant implémenter un cas particulier de modèle :

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \tau_n(S(t) + E(t) + I(t) + R(t)) - \tau_m S(t) \\ \dfrac{dE(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \sigma E(t) - \tau_m E(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \sigma E(t) - \gamma I(t) - \tau_m I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \tau_m R(t) \end{cases} \tag{1}$$

avec $S(t)$ *la population des sains,* $E(t)$ *la population des exposés (infectés latents),* $I(t)$ *les infectés infectieux et* $R(t)$ *les retirés (morts ou soignés),* τ_n, τ_m *taux de natalité et mortalité.*
Les paramètres β *(taux d'infection),* σ *(inverse de durée de latence),* γ *(inverse de durée d'infection) sont spécifiques.*

Question (**Classe** (3.25 points)).
Construire une classe ***modèle SEIR*** *héritant de la classe "modèles compartimentaux" et ajoutant les trois paramètres spécifiques comme attributs de la classe* ***SEIR****.*
Ecrire les constructeurs en utilisant ceux de la classe mère, le destructeur et les accesseurs/mutateurs.

Question (**Méthodes virtuelle I** (0.75 points)).
Ecrire la fonction R_0 *qui renvoit le* R_0 *:*

$$R_0 = \frac{\sigma\beta\tau_n}{\tau_m(\tau_m + \sigma)(\tau_m + \gamma)}$$

Question (**Méthodes virtuelle I** (2.0 points)).
Ecrire la fonction transition_matrix prend le vecteur des variables $\mathbf{u} = (S, E, I, R)$ *et renvoit la partie à droite du égal du modèle (1).*

Exercice 3 (**Modèles structurés par âge** (6.5 points)).

Ici il s'agit écrire d'une classe générale ou on suppose que les fonctions comme $S(t)$ *dépendent aussi de l'âge. Si on à 50 âges et deux populations* $S(t)$, $I(t)$ *on obtient donc 100 compartiments.*

Ici on souhaite écrire le cas général.

Question (**Classe** (3.5 points)).
Ecrire la classe âge_structure qui hérite de la classe "modèle compartimentaux". Elle contiendra un attribut supplémentaire : age (pointeur sur un tableau de réel) qui contiendra les différents âges.

Ecrire les constructeurs (en fonction de ceux de la classe mère), le destructeur et les mutateurs/accesseurs.

Il y aura un constructeur qui prendra comme paramètre : n_v *le nombre de variables (exemple* S *ou* I*), le nombre d'âge (*nb_a*) et l'âge max (réel* age_{max}*). Il initialisera age avec :*

$$age[i] = i * \frac{age_{max}}{nb_a}$$

Question (**Méthode virtuelle** (0.5 points)). *Les fonctions* R_0 *et transition_matrice seront encore virtuelle avec une implémentation vide.*

Question (**Méthodes** (2.5 points)). *Construire une méthode qui prend un numéro de variable* i *(exemple* $S(t)$*) et fait la moyenne sur tous les âges :*

$$S = \frac{1}{age_{max}} \sum_{a=0}^{nb_a - 1} S[a]$$

Toutes les variables et tous les âges sont stockés dans le tableau x0 *de la première classe. Pour faire ce calcul on utilisera la fonction ("protected" pas "private") :*

> *int index_var(int co, int age) qui renvoit l'index de variable : "age +co ** nb_a*"*

qui renvoit la position dans le tableau x0 *de la variable a associé à un âge "age" et un compartiment "co".*

Exercice 4 (**SIR structurés par âge** (7.0 points)).

Pour finir on va introduire un model SIR structurés par âge :

$$\begin{cases} \dfrac{dS_a(t)}{dt} = -\left(\displaystyle\sum_{a'} \beta(a, a')I_{a'}(t)\right) S_a(t) + \tau_n f_n(a)(S_a(t) + E_a(t) + I_a(t) + R_a(t)) - \tau_m f_m(a) S_(t) \\ \dfrac{dI_a(t)}{dt} = \left(\displaystyle\sum_{a'} \beta(a, a')I_{a'}(t)\right) S_a(t) - \gamma I_a(t) - \tau_m f_m(a) I_a(t) \\ \dfrac{dR_a(t)}{dt} = \gamma I_a(t) - \tau_m f_m(a) R_a(t) \end{cases} \tag{2}$$

avec $\beta(a, b)$, $\gamma(a)$, $f_m(a)$ *et* $f_n(a)$ *des fonctions dépendantes de l'âge.*

Question (**Classe** (3.0 points)).
Ecrire la classe Sir_age_structure, qui hérite de la classe précédente, avec comme données supplémentaires : 4 pointeurs de fonction qui décrivent les β, γ, f_m, f_n. *Ecrire les constructeurs en utilisant ceux de la classe mère ainsi que les accesseurs/mutateurs.*

Question (**Méthode virtuelle I** (0.5 points)). *Ecrire la fonction* R_0 *qui indiquera juste que le* R_0 *n'est pas calculable dans ce cas.*

Question (**Méthode virtuelle II** (3.5 points)). *Ecrire la fonction transition_matrix prend le vecteur des variables* $\mathbf{u} = (S_a, I_a, R_a), \quad \forall a \in \{0, nb_a - 1\}$ *et renvoit la partie à droite du égal du modèle (2).*

On utilisera la fonction "index" donnée précédemment.