Guillaume Steimer
Emmanuel Franck

Année 2021-2022
Mathématiques Appliquées L3

Informatique S6 - TP1: rappels de C++

Durée : une séance.

Exercice 1 (**Régression linéaire**).
Dans cet exercice on a deux nuages de points, de taille ns contenus dans des tableaux $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$ *et on cherche un construire un modèle linéaire de type*

$$\mathbf{Y} = \alpha \mathbf{X} + \beta$$

Le principe consiste à trouver α *et* β *qui minimise* $\| \mathbf{Y} - (\alpha \mathbf{X} + \beta) \|_2^2$. *La solution de ce problème est donnée par*

$$\alpha = \frac{\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\frac{1}{n}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2}$$

et

$$\beta = \bar{Y} - \alpha \bar{X}$$

avec $\bar{X}$ *la moyenne de* $\mathbf{X}$.

Question. *Écrire une fonction* $\mathsf{moyenne}$ *qui calcule la moyenne d'un tableau.*

Question. *Écrire une fonction* $\mathsf{régression}$ *qui calcule* α *et* β *à partir de* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$.

Question. *Appliquer cette régression a deux fonctions* $2x - 4$ *and* e^{-x} *sur* $[-2, 2]$. *On prendra 100 points pour construire* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Y}$. *Afficher l'erreur (norme euclidienne) entre le modèle de régression et la véritable fonction.*

Question. *Écrire une fonction* eval *qui pour* x, *qui n'est pas un des 100 points utilisés précédemment, donne une valeur prédite par le modèle de régression.*

Exercice 2 (**Monte Carlo pour** π).
On souhaite estimer la valeur de π. *Pour cela on utilise :*

- *Aire d'un carré de coté* r *:* r^2
- *Aire du quart de cercle inscrit dans le carré* $\frac{\pi r^2}{4}$

La probabilité de présence d'un point dans le quart de cercle est l'aire du quart de cercle sur celle du carré donc $p = \frac{\pi}{4}$. *Pour estimer* p *et donc* π *on tire aléatoirement un nombre de points* n_c *dans le carré, on compte le nombre de points* n_d *qui tombe dans le quart de cercle.*

$$p \approx \frac{n_d}{n_c}$$

Question. *Construire une fonction qui calcule* π *avec une précision* ϵ. *On propose l'algorithme itératif suivant : A l'étape* k, *on génère 100 nombres aléatoires, on met à jour* n_d, n_c, *on compare l'estimation de* π_{k+1} *obtenu à la précédente. On arrête si* $| \pi_{k+1} - \pi_k | < \epsilon$.

Exercice 3 (Simulation d'épidémie).
On considère trois suites S_n, I_n *et* R_n *qui représentent le nombre d'individus "Sains", "Infectés" et "Retirés". L'évolution de ces populations en fonction des jours est donnée par*

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n - \delta\beta S_n I_n \\ I_{n+1} = I_n + \delta(\beta S_n I_n - \gamma I_n) \\ R_{n+1} = R_n + \delta\gamma I_n \end{cases}$$

avec δ *(petit, autour de 0.01) le taux de contact par jour,* β *la dangerosité de la maladie et* $\frac{1}{\gamma}$ *la durée moyenne d'infection.*

Question. *Écrire une fonction qui initialise les trois populations.*

Question. *Écrire une fonction qui calcule les populations pour chaque* n *avec comme paramètres :* β, δ, γ *un pointeur de fonction vers une fonction qui sera un critère d'arrêt (elle prend en paramètre :* n, S_n, I_n, R_n*).* ***On doit stocker toutes les itérations****.*

Question. *Écrire deux fonctions de critère d'arrêt. La première qui arrête le code après* n_{max} *itérations. La seconde qui arrête quand on a un état stationnaire :*

$$| S_{n+1} - S_n | + | I_{n+1} - I_n | + | R_{n+1} - R_n | \leq \epsilon$$

Question. *Vérifier le code avec le comportement suivant. Pour tout* n *on a* $S_{n+1} < S_n$*. De plus, si* $\frac{\beta S_0}{\gamma} < 1$ *(pas d'épidémie).*

$$I_{n+1} < I_n$$

si $\frac{\beta S_0}{\gamma} > 1$ *on a* I_n *qui croit (épidémie) puis décroît jusqu'à zéro pour n assez grand. On prendra les données d'une fièvre de Hong Kong de 1969 :* $\beta = 0.5$ *et* $\gamma = 0.3333$*. On fera varier* S_0*.*