

EDP elliptique et méthodes de Galerkin

Emmanuel Franck^{*},

September 16-20, 2024

Master CMSI, M2, Strasbourg

^{*}MACARON project-team, Université de Strasbourg, CNRS, Inria, IRMA, France

The logo for Inria, featuring the word "Inria" in a red, cursive script font.The logo for IRMA, consisting of the letters "IRMA" in a blue, bold, sans-serif font, with a horizontal line underneath. Below the line, the text "Institut de Recherche Mathématique Avancée" is written in a smaller, blue, sans-serif font.

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

EDP elliptiques et méthodes numériques

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

EDP elliptiques linéaires

On considérera ici des EDP elliptiques et linéaires de la forme:

$$\begin{cases} L(u(\mathbf{x})) = -\nabla \cdot (A(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\beta}(\mathbf{x})u(\mathbf{x})) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), & \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \\ u(\mathbf{x}) = 0, & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}$$

avec $A(\mathbf{x}) \in$ une matrice de fonctions régulières, $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ un vecteur de fonction régulières et $c(\mathbf{x}), f(\mathbf{x})$ des fonctions régulières.

- En général on préfère étudier la **forme faible des équations**.
- On suppose que $u \in W$ avec W un espace Hilbert. On se donne $v \in V$ un espace de Hilbert.
- On obtient la formulation faible en multipliant par v l'équation et en intégrant.

Formulation variationnelle abstraite

On cherche $u \in W$ tel que

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V$$

avec a une forme bilinéaire continue et l une forme linéaire continue. On dit qu'un problème de ce type est **bien posé** si

$$\exists C > 0, \forall b \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R}), \quad \|u\|_W \leq C \|b\|_{\mathcal{L}(V, \mathbb{R})}$$

Lax-Milgram

Soit V un espace de Hilbert, soit $a \in \mathcal{L}(V \times V; \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$. Si la forme bilinéaire est **coercive**:

$$\exists \alpha > 0, \forall u \in V, \quad a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$$

alors le **problème est bien posé** et on

$$\forall b \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R}), \quad \|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|_{\mathcal{L}(V; \mathbb{R})}$$

Exemples

- Equation de Laplace:

$$-\Delta u = f \implies \begin{cases} W = V = H_0^1(\Omega) \\ a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ b(v) = \int_{\Omega} f v \end{cases}$$

- Equation de Stokes:

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{s} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = g \end{cases} \implies \begin{cases} W = V = [H_0^1(\Omega)]^d \times L_{f=0}^2(\Omega), \\ a((\mathbf{u}, p), (\mathbf{v}, q)) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \\ b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{v} + g q) \end{cases}$$

- Equation d'advection:

$$\beta \cdot \nabla u = f \implies \begin{cases} W = \{u \in L^2(\Omega); \beta \cdot \nabla u \in L^2(\Omega); u = 0 \text{ on } \partial\Omega^-\}, & V = L^2(\Omega), \\ a(u, v) = \int_{\Omega} v(\beta \cdot \nabla u), \\ b(v) = \int_{\Omega} f v \end{cases}$$

Problème coercif et minimisation

- Il existe une formulation dite **énergétique** des équations coercive.

Formulation énergétique

Soit $u \in V$ et la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - b(u)$$

Si a est symétrique, positive coercive u est solution de $a(u, v) = b(v)$ si et seulement si u **minimise** $J(u)$.

- Soit $J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((A(\mathbf{x})\nabla u, \nabla u) + c(x)u(x)^2 - f(x)u(x))dx$ avec $A(\mathbf{x})$ symétrique.
- on calcul $J(u + h)$:

$$J(u + \epsilon h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} ((A(\mathbf{x})\nabla(u + \epsilon h), \nabla(u + \epsilon h)) + c(x)(u + \epsilon h)^2 - f(x)(u + \epsilon h))dx$$

$$(\nabla_u J)h = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J(u + \epsilon h) - J(u)}{\epsilon} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2(A(\mathbf{x})\nabla u, \nabla h) + 2c(x)uh - fh)dx$$

donc

$$(\nabla_u J)h = a(u, h) - b(h)$$

- Trouvez le minimiseur de $J(u)$ est équivalent à

$$(\nabla_u J) = 0 \leftrightarrow (\nabla_u J)h = 0, \quad \forall h \in V$$

Perte de coercivité

- On se donne une forme variationnelle $a_\eta(.,.)$ dépendant d'un paramètre η .
- La constante de coercivité est donnée par

$$\alpha_\eta = \inf_{u \in V} \frac{a_\eta(u, u)}{\|u\|_V^2}$$

- On parle **perte de convergence** lorsque cette constante va tendre vers zéro:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|a_\eta\|}{\alpha_\eta} = \infty$$

- **A la limite:** u n'est plus contrôlé par $\|b\|_{\mathcal{L}(V, \mathbb{R})}$ et donc **on perd le côté bien posé**.
- Exemple:

$$-\nu \Delta u + \beta(\mathbf{x}) \cdot \nabla u = 0$$

- Dans ce cas:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\|a_\eta\|}{\alpha_\eta} = O\left(\frac{\|\beta\|_{L^\infty}}{\nu}\right)$$

Théorème BNB

- Il s'agit d'un théorème **plus général que Lax-Milgram qui nous donne le caractère bien posé**. Ici $W \neq V$.

Théorème de Banach-Nečas-Babuška

Soit W un espace de Banach et V un espace de Banach réflexif. Soit $a \in \mathcal{L}(W \times V; \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R})$ alors le problème $a(u, v) = b(v)$ est bien posé sous les conditions:

$$(BNB1), \quad \exists \alpha > 0, \quad \inf_{w \in W} \sup_{v \in V} \frac{a(w, v)}{\|w\|_W \|v\|_V} \geq \alpha$$

$$(BNB2), \quad \forall v \in V, \quad (\forall w \in W, a(w, v) = 0) \implies (v = 0)$$

Cela donne l'estimation:

$$\forall b \in \mathcal{L}(V; \mathbb{R}), \quad \|u\|_W \leq \frac{1}{\alpha} \|b\|_{\mathcal{L}(V; \mathbb{R})}$$

- Si $W = V$ la condition (BNB1) est équivalent à la coercivité et (BNB2) est une conséquence de la coercivité.

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

Principe de la discrétisation

Principe

On cherche $u \in W$ un objet en dimension infini. La discrétisation consiste à se ramener à un problème en dimension fini. Pour cela en général on remplace u par un modèle paramétrique u_θ et on cherche les paramètres θ .

- On considère donc un **espace vectoriel** de dimension finie N noté V_n .
- On commence par définir l'espace:

$$V_n = \left\{ u_\theta(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \theta_i \phi_i(\mathbf{x}), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n, \quad u_\theta(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \right\}$$

- On va donc chercher notre approximation de u dans V_n . En général on demande aux méthodes numériques de satisfaire une **propriété de convergence**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_W$$

Notations

Opérateur de restriction

On appelle \mathcal{R} l'opérateur de **restriction** qui permet de calculer les paramètres θ d'une fonction u :

$$\mathcal{R}(u) : u \in V \longrightarrow \theta_u \in \mathbb{R}^n.$$

Opérateur de reconstruction

On appelle \mathcal{J} l'opérateur de **reconstruction** qui permet de calculer un élément de V_n appelé u_{θ_u} à partir du vecteur de paramètres θ_f :

$$\mathcal{J}(\theta_u) : \theta_u \in \mathbb{R}^n \longrightarrow u_{\theta_u} \in V_n$$

avec

$$\mathcal{J}(\theta_u) = \sum_{i=1}^n \theta_{u,i} \phi_i(\mathbf{x})$$

Opérateur de projection

Le **projecteur** qui associe à u son représentant u_{θ_u} dans V_n est donné par:

$$\Pi_{V_n}(u) = (\mathcal{J} \circ \mathcal{R})(u)$$

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

Opérateur de restriction, projecteur et interpolation

- On connaît \mathcal{J} , comment construire \mathcal{R} ?
- On ne peut pas avoir $\Pi_{V_n}(u)(x) = u(x)$ partout. On le demande à certains points.

Méthodes de collocation

On se donne des points $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ et on impose

$$\Pi_{V_n}(u)(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_i), \quad \forall \mathbf{x}_i \in X$$

Cela donne un système linéaire à résoudre pour obtenir θ . On a donc

$$\mathcal{R}(u) = \theta = A^{-1}\mathbf{b}$$

avec $b_i = u(\mathbf{x}_i)$, $A_{ij} = \phi_j(\mathbf{x}_i)$.

- Ici le projecteur est un **opérateur d'interpolation**.
- Il y a des choix de points plus ou moins optimal selon la base choisie.

Méthodes de collocation

- Résidu de l'EDP $Lu(x) = f(x)$ est l'opérateur

$$R(x, u) = Lu(x) - f(x)$$

Méthodes de collocation

Suivant la même logique que pour le projecteur on va imposer

$$R(\mathbf{x}_j, P_{V_n}(u)) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_j \in X$$

ce qui est équivalent à

$$(LP_{V_n}(u))(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_j) = 0, \quad \forall \mathbf{x}_j \in X$$

- On obtient un système à résoudre.
- On peut démontrer la convergence.

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

- On connaît \mathcal{J} , comment construire \mathcal{R} ?
- Naturellement on veut

$$\theta_u = \min_{\theta} \| u - \Pi_{V_n}(u) \|_W$$

- Puisque V_n est un espace vectoriel de dimension fini il est donc fermé, convexe.
- Le théorème **de projection sur un convexe dans un Hilbert** nous dit qu'il existe un unique projecteur orthogonal P_c qui satisfait

$$\| u - P_c(u) \|_W \leq \| u - g \|_W, \quad \forall g \in V_n$$

- On voit donc que notre opérateur de projection $\Pi_{V_n}(u)$ est **le projecteur orthogonal** sur V_n .
- En general $W \subset L^2(\Omega)$ on prend donc la norme associée au produit scalaire L^2

Opérateur de projection et matrice de masse

Opérateur de restriction et projection orthogonale

Si on définit l'opérateur de restriction tel que

$$\theta_u = \min_{\theta} \int_{\Omega} (u - \Pi_{V_n}(u))^2 dx$$

alors θ_u satisfait $A\theta_u = \mathbf{r}$ avec $A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x})\phi_j(\mathbf{x})dx$ et $r_i = \int_{\Omega} \phi_i(\mathbf{x})f(\mathbf{x})dx$

- On va donc minimiser la fonctionnelle $J(\theta) = \int_{\Omega} (f - \langle \theta, \Phi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^n})^2$ avec Φ le vecteur des fonctions de bases.
- On calcul $J(\theta + h)$:

$$J(\theta + \epsilon h) = \int_{\Omega} (u^2 - 2u\langle \theta + \epsilon h, \Phi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle \theta + \epsilon h, \Phi(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbb{R}^n}^2) dx$$

$$J(\theta + \epsilon h) = \int_{\Omega} (u^2 - 2u\langle \theta + \epsilon h, \Phi(\mathbf{x}) \rangle + \langle \theta, \Phi(\mathbf{x}) \rangle^2 + 2\langle \epsilon h, \Phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \theta, \Phi(\mathbf{x}) \rangle + O(\epsilon^2)) dx$$

- donc

$$J(\theta + \epsilon h) - J(\theta) = \int_{\Omega} -2u\epsilon \langle h, \Phi(\mathbf{x}) \rangle + 2\epsilon \langle h, \Phi(\mathbf{x}) \rangle \langle \theta, \Phi(\mathbf{x}) \rangle + O(\epsilon^2) dx$$

$$(\nabla_{\theta} J)h = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{J(\theta + \epsilon h) - J(\theta)}{\epsilon} \right) = 2 \int_{\Omega} (\langle h, \langle \theta, \Phi(\mathbf{x}) \rangle \Phi(\mathbf{x}) \rangle - \langle h, u\Phi(\mathbf{x}) \rangle) dx$$

- Grace au théorème de Riez on peut identifier le gradient $\nabla_{\theta} J = 2 \int_{\Omega} (\langle \theta, \Phi(\mathbf{x}) \rangle \Phi(\mathbf{x}) - f\Phi(\mathbf{x})) = 2 \int_{\Omega} (\Phi(\mathbf{x})\Phi^t(\mathbf{x})\theta - \Phi(\mathbf{x})u(\mathbf{x})) dx$.
- Le résultat final est obtenu en cherchant la solution de $\nabla_{\theta} J = 0$

Méthode de Galerkin I

- On va se restreindre à une EDP elliptique coercive solution de

$$u = \min_{v \in W} J(v), \quad \text{avec } J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - b(v)$$

Par exemple $a(v, v)$ peut être la forme variationnelle associée à une EDP de réaction diffusion.

- On cherche donc ici à **calculer u_{θ_n} une approximation numérique de u dans V_n .**

Méthode de Ritz Galerkin

Soit une EDP dont la solution minimise $J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - b(v)$. La méthode de Ritz-Galerkin détermine l'approximation de notre EDP u_{θ_n} dans V_n en **restreignant le problème de minimisation à V_n** :

$$u_{\theta_n^*} = \min_{v_{\theta} \in V_n} J(v_{\theta})$$

ce qui est équivalent à

$$\theta_n^* = \min_{\theta \in \Theta} J(v_{\theta})$$

Solution de Ritz Galerkin

La solution de la méthode de Ritz-Galerkin est donnée par

$$A\theta = \mathbf{r}$$

avec $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ et $\mathbf{r}_i = b(\phi_i)$.

- Preuve:

- ▶ On va calculer le gradient de $J(\theta) = a(\langle \theta, \Phi \rangle, \langle \theta, \Phi \rangle) - b(\langle \theta, \Phi \rangle)$ car $v_\theta \in V_n$ est équivalent à dire que $v_\theta = \langle \theta, \Phi \rangle$
- ▶ Par bilinéarité et symétrie de a et linéarité de b on a

$$J(\theta + \epsilon h) = \frac{1}{2}a(\langle \theta, \Phi \rangle, \langle \theta, \Phi \rangle) + a(\langle \epsilon h, \Phi \rangle, \langle \theta, \Phi \rangle) + O(h^2) - b(\langle \theta + \epsilon h, \Phi \rangle)$$

$$J(\theta + \epsilon h) - J(\theta) = a(\langle \epsilon h, \Phi \rangle, \langle \theta, \Phi \rangle) - b(\langle \epsilon h, \Phi \rangle) + O(\epsilon^2)$$

- ▶ par bilinéarité de a et celle du produit scalaire et puis que h est constant en espace.

$$J(\theta + \epsilon h) - J(\theta) = \epsilon \langle h, a(\Phi, \langle \theta, \Phi \rangle) \rangle - \epsilon \langle h, b(\Phi) \rangle + O(\epsilon^2)$$

- ▶ On identifie le gradient par le théorème de Riez

$$\nabla_\theta J = a(\Phi, \langle \theta, \Phi \rangle) - b(\Phi) = a(\Phi, \Phi)\theta - b(\Phi)$$

avec $A = a(\Phi, \Phi)$ la matrice tel que $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$ et $\mathbf{r} = b(\Phi)$ avec $\mathbf{r}_i = b(\phi_i)$.

Défauts de la méthode de Ritz-Galerkin

Remarque sur la. méthode de Ritz Galerkin

Soit: on cherche $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V$$

La méthode de Ritz-Galerkin peut être vu comme la restriction de ce problème a un espace discret V_n .

- La méthode de Ritz Galerkin avec l'interprétation énergétique ne marche que pour les EDP avec une formulation variationnelle **symétrique coercive**.
- Pour les problème non-symétrique on peut quand même résoudre

$$A\theta = \mathbf{r}, \quad \text{avec } A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j), \quad \mathbf{r}_i = b(\phi_i).$$

il n y a juste pas d'interprétation énergétique.

- **Erreur importante pas bien pour des problèmes avec une perte de coercivité.**

Projection de Galerkin Moindre carrés

Méthode de Galerkin Moindre carrés (LS-Galerkin)

Soit une EDP de la forme $Lu = f$ avec L un opérateur elliptique. La méthode de **Galerkin moindre carré** détermine l'approximation u_{θ_n} dans V_n en **minimisant dans V_n** :

$$u_{\theta_n^*} = \min_{v_{\theta} \in V_n} J(v_{\theta})$$

avec $J(v_{\theta}) = \|Lv_{\theta} - f\|_{L^2}^2$ ce qui est équivalent à

$$\theta_n^* = \min_{\theta \in \Theta} J(v_{\theta})$$

Solution de LS-Galerkin

La solution de la méthode de LS-Galerkin est donnée par

$$A\theta = \mathbf{r}$$

avec $A_{ij} = \langle L(\phi_i), L(\phi_j) \rangle_{L^2}$ et $\mathbf{r}_i = \langle L(\phi_i), f \rangle_{L^2}$.

- La preuve est très similaire à celle de la méthode de Ritz-Galerkin.
- **Petrov-Galerkin**: part d'un problème de minimisation plus abstrait et donne une méthode où les fonctions tests et la solution vivent dans des espaces différents.

Méthode de Petrov Galerkin

on cherche $u \in W_n$ tel que

$$a(u, v) = b(v), \quad \forall v \in V_n$$

Dans cette méthode on se permet un espace test et un espace de représentation de la fonction différent.

- Il s'agit de la formulation **la plus général des méthodes de Galerkin**.
- Il existe une reformulation comme un problème de minimisation qu'on introduira pas ici.
- Pour simplifier la suite on va supposer que la forme bilinéaire $a(.,.)$ reste exacte (donc si des coefficients dependent de l'espace ils sont intégrer exactement).

Espace conforme

La méthode d'approximation est dit conform si $W_n \subset W$ et $V_n \subset V$

Lemme de Cea I

- Un premier théorème nous dit que si le problème discret satisfait **les hypothèses de Lax-Milgram ou du théorème BNB au niveau discret** le problème sera **bien posé**.
- Si il n'y a pas des approximation de $a(.,.)$ et de $b(.)$ la conformité de V_n suffit dans le cas coercif et $\dim V_n = \dim W_n$ suffit dans le cas BNB.

Lemma de Cea

Soit V_n et W_n des espaces conformes. On nomme u_n la solution de Galerkin $a(u_n, v_n) = b(v_n)$, $\forall v_n \in V_n$ Si le problème discret est bien posé alors on a:

$$\| u - u_n \|_W \leq C \inf_{w_n \in V_n} \| u - w_n \|_W$$

- Puis $\inf_{w_n \in W_n} \| u - u_n \|_W \leq \| u - \Pi_n(u) \|_W$ l'erreur est donc contrôlé par **l'erreur de projection de la solution sur W_n** .
- Le problème va jouer dans le constante d'erreur mais ce qui compte avant tout c'est la capacité de l'espace discret a représenter la solution.

- Démonstration

- ▶ $\forall v_n \in V_n, \quad a(u_n - w_n, v_n) = a(u_n - u + u - w_n, v_n)$
- ▶ $\forall v_n \in V_n, \quad a(u_n - w_n, v_n) = a(u_n - u, v_n) + a(u - w_n, v_n)$
- ▶ Par définition de u_n $a(u_n, v_n) = l(v_n)$ et puisque $V_n \subset V$ on a

$$a(u, v_n) = b(v_n)$$

- ▶ donc $a(u_n - u, v_n) = 0$.
- ▶ En appliquant les hypothèses de BNB on a

$$\alpha_h \|u_n - w_n\|_W \leq \sup_{v_n \in V_n} \frac{a(u_n - w_n, v_n)}{\|v_n\|_V} = \sup_{v_n \in V_n} \frac{a(u - w_n, v_n)}{\|v_n\|_V} \leq \|a\|_{W,V} \|u - w_n\|_W$$

- ▶ On a donc

$$\|u_n - w_n\|_W \leq \frac{\|a\|_{W,V}}{\alpha_h} \|u - w_n\|_W$$

- ▶ Pour conclure on combine la dernière inégalité avec

$$\|u - u_n\|_W \leq \|u - w_n\|_W + \|u_n - w_n\|_W$$

Conditions limites

- Soit une condition limite $u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ qui n'est pas imposée dans l'espace.
- Méthodes de **Galerkin/LS Galerkin**

$$\theta^* = \min_{\theta} J(v_{\theta})$$

- On remplace $J(v_{\theta})$ par

$$J(v_{\theta}) + \frac{1}{\epsilon} \|v_{\theta} - g\|_{L^2}^2$$

- Il s'agit d'une formulation faible de la contrainte de bord (sinon c'est imposée dans l'espace V_n)
- Lorsqu'on calcule le gradient on trouve:

$$\left(A + \frac{1}{\epsilon}M\right)\theta = \mathbf{b}$$

- On résout donc ce problème relaxé.

EDP elliptiques et méthodes numériques

Rappels sur la théorie des EDP elliptiques

Principe et notations pour la discrétisation

Méthodes de collocation

Méthode de Galerkin

Exemples d'espaces d'approximation

Méthodes élément finis I

- Il existe beaucoup d'espace d'approximation élément finis.

Principe de construction

- On se donne un maillage M_h , composé de maille polygonal K
 - On construit une base de fonctions localement dans chaque éléments.
 - On construit les fonctions de bases globale par recollement C_0, C_1 etc.
-
- Comment on construit localement la base ?

Element

On se donne K une maille, P est un espace de fonction sur K , Σ un ensemble de q forme linéaire $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ agissant sur P appelé les **degré de liberté**. La base de fonction (ϕ_1, \dots, ϕ_q) sur K est construite tel que

$$\sigma_i(\phi_j) = \delta_{ij}$$

- L'opérateur de restriction renvoi les degrés de liberté globaux.

Méthodes élément finis II

- Exemple: P_k Lagrange. On se donne q points (x_1, \dots, x_q) dans K et $\sigma_i(\phi) = \phi(x_i)$.
- D'autres élément finis utilise des valeurs moyenne sur les arrêtes, des quantités intégrées aux faces comme **degrés de liberté**.

Convergence

L'erreur est donnée par l'erreur de projection/interpolation sur l'espace EF. Soit un maillage régulière Si tous les éléments (K, P, Σ) satisfont

$$\mathbb{P}_k \subset \widehat{P} \subset W^{k+1,p}(K) \subset W(K)$$

et l'espace d'approximation V_n^k est conforme dans $W^{1,p}(\Omega)$ alors

$$\left| v - \Pi_n^k(v) \right|_{1,p,\Omega} \leq ch^l |v|_{l+1,p,\Omega}$$

Malediction de la dimension

Domain: $[0, 1]^d$. **Maille:** Quadrangle. N_x le nombre de points par direction. $h = \frac{1}{N_x}$.
Nombre de cellules: $(N_x + 1)^d$. Nombre de Dof par maille avant recollement: $(p + 1)^d$.

Base spectrale

On se place dans $L^2(\Omega)$. On connaît un certain nombre de bases de cet espace: **base de Fourier, Legendre, Hermite, Chebychev** etc.

- **Les méthodes spectrales** utilisent des troncatures à n_{max} fonctions. éléments de ces bases.
- Peut être sans maillages. Exemple: domain $[0, 1]^d$ avec BC périodique. On passe en Fourier et on résout.
- **Convergence type:**

$$|v - \Pi_{n_{max}}(v)|_{L^2} \leq c e^{-\alpha n_{max}}$$

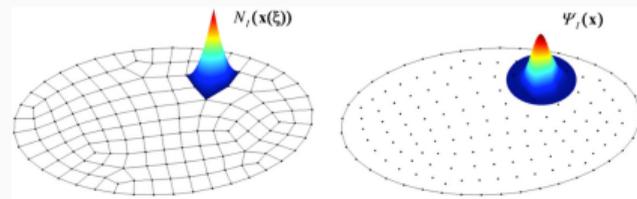
- On réintroduit des grilles pour les géométries complexes, les quadratures d'intégrales, les BC complexes. On parle de méthode **pseudo-spectrales**.

Méthodes à bases radiales

- La théorie des noyaux reproduisant nous dit que

$$\mathcal{J}(u) = \sum_{i=1}^n \theta_i k(x, x_i)$$

avec k le noyau associé a un RKHS H est la représentation naturelle.



Méthode de Galerkin à base radiale

La méthode des **bases radiales** consiste a prendre $k(x, x_i) = \phi(|x - x_i|)$. Si $v \in H^k(\Omega)$ la transformée de Fourier de ϕ satisfait

$$\hat{\phi}(\omega) \sim (1 + |\omega|^2)^{-2\beta}$$

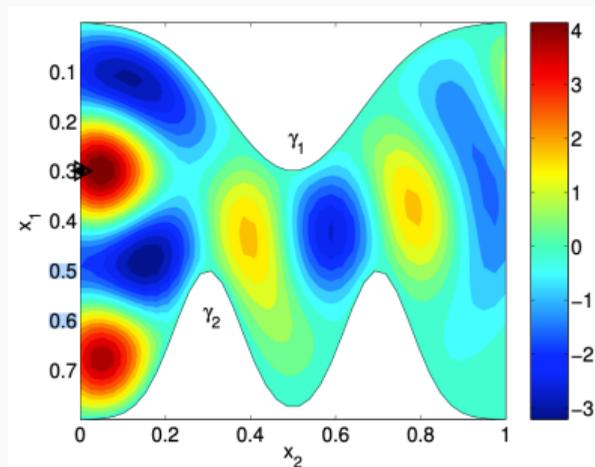
si $\beta > k > \frac{d}{2} + 1$ alors on a

$$|v - \Pi_n(v)|_{H^1} \leq ch^{k-1} |v|_{H^k}$$

avec $h = \sup_{x \in \Omega} (\min_{i \leq n} d(x, x_i))$

Méthodes de collocations

- Les approximations **spectrales** et **à base radiale** sont souvent utilisés pour des méthodes de collocations.
- **Exemple:** méthode à base radiales



- Si vous prenez comme base des **polynômes de Lagrange d'ordre 1** qui interpole les points du maillage et les points du maillage comme points de collocation vous obtenez les différences finis d'ordre classique.