Université de Strasbourg | **Techniques d'Analyse Numérique (TAN1)**
L3 Mathématiques (S5) | **Année 2019-2020**

TD-TP3. Résolution de systèmes linéaires : méthodes itératives

Rappels : Méthodes itératives pour résoudre $Ax = b$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la décomposition $A = M - N$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Les méthodes itératives pour résoudre $Ax = b$ reviennent à étudier la suite suivante

$$\begin{cases} Mx_{k+1} = Nx_k + b = Mx_k - (Ax_k - b), \\ x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

On considérera en particulier les trois méthodes suivantes, basées sur la décomposition de A en
$A = \begin{pmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{pmatrix}$

- Méthode de Jacobi : $M = D$ et $N = E + F$
- Méthode de Gauss-Seidel : $M = D - E$ et $N = F$
- Méthode de relaxation (ou méthode SOR) : $M = \frac{D}{\omega} - E$ et $N = \frac{1-\omega}{\omega} D + F$.

1 Convergence des méthodes itératives

Exercice 1 : Application du théorème de convergence

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\bar{x}$ l'unique solution de $Ax = b$.

1. Écrire une itération de la méthode de Gauss-Seidel (c'est-à-dire x_{k+1} en fonction de x_k).
2. On définit e_k comme l'erreur suivante : $e_k = x_k - \bar{x}$, pour tout $k \geq 0$. Montrer qu'il existe $a \in [0, 1[$ tel que
$$\forall k \in \mathbb{N}, ||e_{k+1}||_\infty \leq a||e_k||_\infty.$$
Relier a à la matrice de la méthode itérative de Gauss-Seidel.
3. En déduire la convergence de la suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
4. Faire le lien avec un théorème de convergence sur les méthodes itératives, vu en cours.

Exercice 2 : Critères de convergence

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel convergent-elles ?

Indication : Pour la méthode de Gauss-Seidel, on distinguera les cas $a \in [0, 4]$ et $a \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$. On étudiera le cas $a \in [0, 4]$ pour la convergence.

Exercice 3 : Méthode de relaxation (ou méthode SOR)

Étudier la convergence de la méthode SOR (ou méthode de relaxation) lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Implémentation python

Rappels : script python.

Avant toute chose, importer les modules `numpy` et `matplotlib.pyplot` grâce aux lignes de commandes suivantes (à écrire en préambule de tous vos scripts) :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

On pourra utiliser les fonctions suivantes de Python : `np.diag`, `np.triu`, `np.tril`, ainsi que les fonctions `np.linalg.solve`, `np.linalg.inv` et `np.linalg.norm`.

Pour l'implémentation de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on utilisera le critère d'arrêt suivant :

`arrêt lorsque` $\|Ax_k - b\| \leqslant \varepsilon \|b\|$ `avec` ε `petit.`

Exercice 4 : Méthode de Jacobi

1. Pour cette méthode, M est la partie diagonale de A et $-N$ la partie extra-diagonale. Ecrire une fonction python qui renvoie :
   — une solution approchée du système linéaire $Ax = b$,
   — le nombre d'itérations k,
   — la suite des résidus relatifs $(\frac{\|Ax_k-b\|}{\|b\|})_k$
   — la suite des erreurs relatives $(\frac{\|x_k-\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|})_k$ ($\bar{x}$ est la solution de $Ax = b$ calculée par `np.linalg.solve`).
2. Rajouter dans les sorties de votre fonction python le calcul du rayon spectral de la matrice $M^{-1}N$ (on pourra utiliser la fonction `np.linalg.eig` de python).
3. Appliquer votre fonction à la matrice du Laplacien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et au vecteur } b = \left(\sin(\tfrac{4\pi}{n+1}), ..., \sin(\tfrac{4\pi i}{n+1}), ..., \sin(\tfrac{4\pi n}{n+1})\right)^t$$

Exercice 5 : Méthode de Gauss-Seidel

1. Pour cette méthode, M est la partie triangulaire inférieure (diagonale comprise) de A et $-N$ la partie triangulaire (strictement) supérieure.
   Ecrire une fonction python qui renvoie une solution approchée du système linéaire, la suite des résidus relatifs, la suite des erreurs relatives ainsi que le calcul du rayon spectral de $M^{-1}N$.
2. Appliquer votre fonction à la matrice du Laplacien et au vecteur b calculé précédemment.

Exercice 6 : Comparaison des méthodes

1. Tracer sur le même graphique l'évolution du résidu relatif au cours des itérations pour les deux méthodes en échelle semi-logarithmique. On pourra utiliser la fonction `plt.yscale('log')` de python. Idem pour l'évolution de l'erreur relative au cours des itérations. Commenter.
2. Comparer le rayon spectral de $M^{-1}N$ pour les deux méthodes. Commenter.
3. Quel est le nombre d'opérations nécessaires pour chacune des méthodes dans le cas de la matrice du Laplacien ? Comparer à la méthode par factorisation LU.

4. Appliquer les deux méthodes aux matrices :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

On pourra prendre $b = (1, 1, 1)^t$. Commenter.

3 Comprendre les résultats numériques

Exercice 7 : Matrice du Laplacien

On souhaite résoudre un système de n équations écrit sous la forme $Ax = b$ par une méthode itérative, avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\bar{x}$ la solution exacte.

1. Rappels sur la matrice du Laplacien.
   (a) Vérifiez que les valeurs propres et vecteurs propres de A, notés $(\lambda^{(k)}, v^{(k)})$, pour $k = 1, ...n$, sont donnés par
   $$v_i^{(k)} = \sin\left(\frac{k\pi i}{n+1}\right), \text{ pour } i = 1, ..., n \quad \text{et} \quad \lambda^{(k)} = 4\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right).$$
   (b) Que vaut le rayon spectral de A ?
2. La méthode de Jacobi.
   (a) Calculer J la matrice d'itération de la méthode de Jacobi.
   (b) En remarquant que $J = \frac{1}{2}(2I_n - A)$, que vaut le rayon spectral de J (noté $\rho(J)$) ?
   (c) La méthode de Jacobi converge-t-elle ?
3. La méthode de Gauss-Seidel
   (a) Exprimer G, la matrice d'itération de la méthode de Gauss-Seidel.
   (b) On peut montrer que
   $$\rho(G) = \left(1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right)^2.$$
   Quelle méthode convergera le plus rapidement ?

Exercice 8 : Pas de résultat de comparaison général

1. Soit A_1 la matrice suivante $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On note J la matrice d'itération de la méthode de Jacobi et G celle de la méthode de Gauss-Seidel. Montrer que $\rho(J) < 1 < \rho(G)$, où $\rho(\cdot)$ désigne le rayon spectral.
2. Soit A_2 la matrice suivante $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que cette fois-ci, on a $\rho(G) < 1 < \rho(J)$.