

Stage L3, à l'IRMA dirigé par Emmanuel Franck Schéma de Boltzmann pour des EDP de convection-diffusion scalaires

Clément BERGER

Août 2018

Remerciements : Je tiens à remercier mon maître de stage Emmanuel Franck, qui m'a guidé et conseillé tout au long de mon stage, ainsi que le reste de l'équipe, et particulièrement Clémentine Courtes, qui m'a aidé quand j'en ai eu besoin. Je remercie aussi les créateurs du module de python pyLBM, Benjamin Grailles et Loïc Gouarin, qui m'ont aidé lors des simulations.

Introduction

On se propose d'étudier les équations du type :

$$\partial_t \vec{u} + \partial_x F(\vec{u}) = S(\vec{u}) + \mu \partial_{xx} \vec{u}$$

Ces systèmes sont essentiels en mécanique des fluides et solution, en électromagnétisme par exemple et sont très utilisés dans l'industrie. Il est donc très important de les résoudre numériquement. Ici on se focalisera sur le cas scalaire plus simple et déjà capable de traiter des phénomènes biologiques et physiques. L'objectif est d'étudier un type de schémas numériques, les schémas de Boltzmann. Ces méthodes sont très utilisées dans l'industrie car les schémas sont simples, et ils sont de plus très parallélisables. Nous commencerons par déterminer quelques solutions explicites à certaines de ces équations, puis nous construirons les schémas pour les équations de type convectives, puis celles de de type diffusives, pour finir par combiner les deux.

1 Théorie et solutions exactes

On va étudier quelques équations dont on déterminera les solutions exactes, sur lesquelles on pourra tester nos schémas.

Étudions d'abord certains cas particuliers de $\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0$.

1.1 Burgers

$$f(u) = \frac{u^2}{2}$$

C'est une équation de base provenant de la mécanique des fluides, avec une non linéarité très simple qu'on utilise souvent pour tester des schémas.

1.1.1 Choc

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{si } x \leq 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ avec } u_L > u_R.$$

La solution entropique est un choc dont la vitesse est donnée par la formule de Rankine-Hugoniot.

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x \leq \sigma t \\ u_R & \text{si } x > \sigma t \end{cases}, \text{ avec } \sigma = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{1}{2}(u_L + u_R)$$

1.1.2 Détente

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{si } x \leq 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{cases}, \text{ avec } u_L < u_R$$

La solution entropique est une onde de détente.

$$f' = id$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x \leq u_L t \\ \frac{x}{t} & \text{si } u_L t < x \leq u_R t \\ u_R & \text{si } u_R t < x \end{cases}$$

1.1.3 Avec un sinus

$$u(x, 0) = \sin(2\pi x), \text{ défini sur } [a, b].$$

Le temps d'explosion est donné par : $T^* = \frac{-1}{\min(\alpha, 0)}$ avec

$$\alpha = \min_{y \in [a, b]} \frac{d}{dy} f'(u(y, 0)) = 2\pi \min_{y \in [a, b]} \cos(2\pi y) = -2\pi. \text{ Donc } T^* = \frac{1}{2\pi} \approx 1, 59.$$

Avant T^* , on a par la méthode des caractéristiques :

$$u(\sin(2\pi x)t + x, t) = \sin(2\pi x)$$

Informatiquement, ceci peut se résoudre simplement avec une méthode de Newton.

1.2 Trafic routier, modèle LWR

L'équation est ici utilisée pour étudier l'évolution du trafic routier dans le temps, la variable suivie étant la densité de voitures sur la route (on fait le rapport du nombre de voitures présentes sur le nombre de voitures qu'il est théoriquement possible de placer sur la route).

On obtient pour flux : $f(u) = uv(u)$ avec et le modèle LWR consiste à

prendre $v(u) = v_{max}(1 - \frac{u}{u_{max}})$. L'idée est de dire qu'à mesure que le trafic s'intensifie, les conducteurs roulent moins vite, et ce de façon linéaire.

$$\text{On prend : } u(x, 0) = \begin{cases} u_L & \text{si } x \leq 0 \\ u_R & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1.2.1 Choc

$u_L < u_R$. Par Rankine-Hugoniot, on a :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x \leq \sigma t \\ u_R & \text{si } \sigma t < x \end{cases}, \text{ avec } \sigma = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}$$

On retrouve un choc similaire à celui de Burgers, à la différence près que la vitesse du choc est différente.

1.2.2 Détente

$$u_L > u_R$$

$$f'(u) = v_{max}(1 - \frac{2u}{u_{max}})$$

$$f'^{-1}(u) = \frac{1}{2}u_{max} \left(1 - \frac{u}{v_{max}} \right)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < f'(u_L)t \\ \frac{1}{2}u_{max} \left(1 - \frac{x}{t v_{max}} \right) & \text{si } f'(u_L)t < x < f'(u_R)t \\ u_R & \text{si } f'(u_R)t < x \end{cases}$$

On obtient ici une détente. On voit que les cas de choc et de détente selon u_L et u_R sont inversés par rapport à Burgers.

1.3 Buckley-Leverett

C'est un modèle utilisé dans l'industrie, notamment pour le pétrole. Lorsque l'on veut récupérer du pétrole, il est parfois plus commode de le mélanger à de l'eau (on a aussi éventuellement la présence de gaz). Cette équation sert à suivre la concentration de pétrole dans le fluide.

Le flux est alors : $f(u) = \frac{u^2}{u^2 + A(1-u)^2}$, on remarquera que la fonction n'est pas convexe.

$$f'(u) = \frac{2Au(1-u)}{(u^2 + A(1-u)^2)^2}$$

On choisit de se placer à $A = \frac{1}{4}$, ce qui donne à f l'allure d'un S sur $[0, 1]$ (voir figure 1 en annexe).

1.3.1 Choc

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f est convexe sur $[0, \frac{1}{2}]$, donc on peut appliquer la théorie classique, on obtient par Rankine-Hugoniot :

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \leq \sigma t \\ 0 & \text{si } x > \sigma t \end{cases}, \text{ avec } \sigma = \frac{f(\frac{1}{2}) - f(0)}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{8}{5}$$

Avec cette condition initiale, on obtient un choc, la partie non convexe de la fonction n'étant pas sollicitée.

1.3.2 Détente puis choc

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Cette fois, f n'est pas convexe sur tout le domaine (voir figure 1 en annexe). En fait la solution doit mêler choc et détente de manière à ce que la courbe décrive l'enveloppe convexe de $u \mapsto f(u)$ dans le plan $(u, f(u))$.

On cherche $u^* \in]0, 1[$ tel que $f'(u^*) = \frac{f(u^*) - f(0)}{u^* - 0} = \frac{f(u^*)}{u^*}$.

On obtient $u^* = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

On a donc une détente jusqu'à u^* puis un choc jusqu'à 0 :

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{3}{4} & \text{si } x < f'(\frac{3}{4})t \\ f'^{-1}(\frac{x}{t}) & \text{si } f'(\frac{3}{4})t < x < \sigma t \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \text{si } x = \sigma t \\ 0 & \text{si } \sigma t < x \end{cases} \text{ avec } \sigma = f'(u^*) = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}, \text{ et } f'(\frac{3}{4}) = \frac{24}{1369}$$

Pour faire les calculs, on sera ici obligé de calculer numériquement f'^{-1} , néanmoins au vu de la forme de f' , on se ramène à chercher les zéros d'un polynôme, donc on est en mesure de faire un calcul précis.

Regardons maintenant des problèmes de diffusion.

1.4 Equation de la chaleur

1.4.1 Solution fondamentale

Il s'agit de la solution du problème :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) = \mu \partial_{xx} \rho(t, x) & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \rho(0, x) = \delta_0(x) \end{cases}$$

On vérifie aisément que la fonction donnée par $\rho(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \exp(-\frac{x^2}{4\mu t})$ pour $t > 0$ est bien la solution de cette équation.

1.4.2 A partir d'un sinus

On regarde le problème :

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, x) = \mu \partial_{xx} \rho(t, x) & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ \rho(0, x) = \sin(\pi x) \end{cases}$$

On vérifie que la fonction $\rho(t, x) = \sin(\pi x) \exp(-2\pi\mu t)$ est bien la solution de cette équation (en fait c'est le produit de convolution entre la solution fondamentale et la condition initiale).

On prendra garde au changement de notation, désormais le flux sera F , la notation f devenant autre chose

2 Schéma numérique pour les EDP de convection

Dans un premier temps, on s'occupe de la convection. On voit que cela regroupe les 3 premières équations vues précédemment, donc savoir résoudre ce type d'équations est déjà très utile en tant que tel. On se dispensera aussi de mettre un terme source.

2.1 Schéma à deux vitesses (dit D1Q2)

L'objectif est d'établir un schéma pour approximer l'EDP :

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) = 0 \tag{1}$$

Nous allons l'approximer par le système :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t U + \partial_x V = 0 \\ \partial_t V + \lambda^2 \partial_x U = \frac{1}{\varepsilon}(F(U) - V) \end{cases}$$

avec $\varepsilon \rightarrow 0$ [8].

Proposition : Le système S est approché quand $\varepsilon \rightarrow 0$ par :

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) = \varepsilon \partial_x((\lambda^2 - F'(U)^2) \partial_x U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \tag{2}$$

Le système (S) est donc une approximation de notre équation. C'est à partir de ce système que nous allons établir un schéma pour calculer une solution approchée.

Avant d'écrire le schéma, nous allons réécrire le système S sous une forme plus simple. Faisons le changement de variable :

$$\begin{cases} f_+ + f_- = U \\ \lambda(f_+ - f_-) = V \end{cases}$$

On pose aussi $f_{\pm}^{eq} = \frac{U \pm F(U)}{2}$.

Cherchons les équations vérifiées par f_+ et f_- .

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} \partial_t U + \partial_x V = 0 \\ \partial_t V + \lambda^2 \partial_x U = \frac{1}{\varepsilon}(F(U) - V) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t f_+ + \partial_t f_- + \lambda \partial_x f_+ - \lambda \partial_x f_- = 0 \\ \lambda \partial_t f_+ - \lambda \partial_t f_- + \lambda^2 \partial_x f_+ + \lambda^2 \partial_x f_- = \frac{F(U) - V}{\varepsilon} \end{cases} \\
& \stackrel{[2] \leftarrow [2] + \lambda[1]}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \partial_t f_+ + \partial_t f_- + \lambda \partial_x f_+ - \lambda \partial_x f_- = 0 \\ \lambda \partial_t f_+ + \lambda^2 \partial_x f_+ = \frac{F(U) - \lambda(f_+ - f_-)}{2\varepsilon} \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t f_+ + \partial_t f_- + \lambda \partial_x f_+ - \lambda \partial_x f_- = 0 \\ \partial_t f_+ + \lambda \partial_x f_+ = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{F(U)}{2\lambda} - \frac{f_+}{2} + \frac{f_-}{2} \right) = \frac{1}{\varepsilon} (f_+^{eq} - f_+) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t f_- - \lambda \partial_x f_- = -\frac{1}{\varepsilon} (f_+^{eq} - f_+) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{f_+}{2} - \frac{f_-}{2} - \frac{F(U)}{2\lambda} \right) \\ \partial_t f_+ + \lambda \partial_x f_+ = \frac{1}{\varepsilon} (f_+^{eq} - f_+) \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_t f_- - \lambda \partial_x f_- = \frac{1}{\varepsilon} (f_-^{eq} - f_-) \\ \partial_t f_+ + \lambda \partial_x f_+ = \frac{1}{\varepsilon} (f_+^{eq} - f_+) \end{cases} \Leftrightarrow (S')
\end{aligned}$$

C'est pour (S') que nous allons établir un schéma. On utilise une méthode de splitting d'opérateurs. L'idée est de fragmenter les différents morceaux de l'équation, en imaginant que les effets des différentes parties s'appliquent les uns après les autres dans le temps, pour les traiter successivement. Ici, l'équation peut être scindée en une partie transport ($\partial_t f_{\pm} \pm \lambda \partial_x f_{\pm} = 0$) et une partie dite de relaxation ($\partial_t f_{\pm} = \frac{1}{\varepsilon} (f_{\pm}^{eq} - f_{\pm})$). On va donc supposer que pendant un pas de temps, f_{\pm} va d'abord subir la transformation du transport, puis celle de la relaxation.

Soit Δt le pas de temps de notre schéma, et on notera en exposant le temps auquel sont prises les fonctions.

Pour l'étape de transport, la méthode des caractéristiques nous donne :

$$f_{\pm}^{n+1}(x) = f_{\pm}^n(x \mp \lambda \Delta t).$$

Pour la relaxation, on doit faire un schéma approchant : $\partial_t f_{\pm} = \frac{1}{\varepsilon} (f_{\pm}^{eq} - f_{\pm})$.

Alors on a : $\partial_t U = \frac{1}{\varepsilon} (f_+^{eq} + f_-^{eq} - f_+ - f_-) = 0$. donc pendant cette étape, U est constant, et donc f_{\pm}^{eq} aussi.

On discrétise en mélangeant schéma implicite et explicite :

$$\frac{f_{\pm}^{n+1} - f_{\pm}^n}{\Delta t} = \theta \frac{f_{\pm}^{eq} - f_{\pm}^{n+1}}{\varepsilon} + (1 - \theta) \frac{f_{\pm}^{eq} - f_{\pm}^n}{\varepsilon}, \text{ avec } 0 \leq \theta \leq 1.$$

En posant $\omega = \frac{\Delta t}{\varepsilon + \theta \Delta t}$, on obtient : $f_{\pm}^{n+1} = f_{\pm}^n + \omega (f_{\pm}^{eq} - f_{\pm}^n)$.

Le schéma final devient donc :

$$f_{\pm}^*(x) = f_{\pm}^n(x \mp \lambda \Delta t)$$

$$f_{\pm}^{n+1}(x) = f_{\pm}^*(x) + \omega(f_{\pm}^{eq*}(x) - f_{\pm}^*(x))$$

On précise bien que f_{\pm}^{eq*} est calculée avec $u^* = f_+^* + f_-^*$.

On prend dorénavant $\theta = \frac{1}{2}$ (en particulier, on obtient $\varepsilon = \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}\right) \Delta t$).

Proposition : Le schéma est consistant en temps

avec l'EDP : $\partial_t U + \partial_x(F(U)) = \left(\left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{2}\right) \Delta t\right) \partial_x((\lambda^2 - F'(U)^2)\partial_x U) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$

Nous allons maintenant regarder la stabilité, dans le cas linéaire. On pose donc $F(U) = cU$, c une constante.

Proposition : Si $\omega \in [0, 2]$ et $\lambda \geq c$, alors le schéma est L^2 -stable.

Dans le cas non linéaire, la condition $\lambda \geq c$ devient $\lambda \geq \|F'\|_{\infty}$.

On prend $\lambda = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, c'est donc ce que nous ferons par la suite. On remarque qu'alors la condition de stabilité nous donne alors une CFL puisqu'on doit avoir $\frac{\Delta x}{\Delta t} \geq \|F'\|_{\infty}$.

λ est appelé vitesse du schéma.

2.2 Généralisation

En fait il s'agit du cas particulier d'un processus plus général.

Soit Λ une matrice diagonale de taille n , dite matrice des vitesses.

On considère alors :

$$\partial_t f + \Lambda \partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}(f^{eq} - f) \quad (3)$$

avec f vecteur colonne de taille n , et f^{eq} telle qu'on ait une matrice P vérifiant $Pf = Pf^{eq} \in \mathbb{R}$ et $P\Lambda f^{eq} = F(U)$.

On pose $U = Pf$ et $V = P\Lambda f$.

En multipliant (3) par P et comme $Pf = Pf^{eq}$ on obtient :

$$\partial_t(Pf) + \partial_x(P\Lambda f) = 0.$$

Cette fois on multiplie (8) par $P\Lambda$: $\partial_t V + \partial_x(P\Lambda^2 f) = \frac{1}{\varepsilon}(F(U) - V)$.

On a donc le système :

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x V & = 0 \\ \partial_t V + \partial_x(P\Lambda^2 f) & = \frac{1}{\varepsilon}(F(U) - V) \end{cases}$$

Avec $P=(1 \ 1)$ et Λ ayant $\pm\alpha$ comme vitesses, on obtient le système (S). De même, on montre que :

Proposition : Le système (3) vérifie quand $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\partial_t U + \partial_x(F(U)) = \varepsilon \partial_x(P\Lambda^2 f^{eq} - |F(U)|^2 \partial_x U) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (4)$$

On peut donc de la même façon établir un schéma pour ce nouveau système (il n'y a que les vitesses et le nombre d'équations scalaires qui changent) qui peut servir aussi à approximer notre EDP d'origine.

2.3 Schéma à trois vitesses (dit D1Q3)

On reprend les notations de la partie précédente.

Prenons $P = (1 \ 1 \ 1)$ et $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_+ \end{pmatrix}$ avec $\lambda_- < \lambda_0 < \lambda_+$.

On souhaite faire de la même manière que le D1Q2, avec d'abord un transport (en rajoutant simplement une vitesse), puis la relaxation. Il nous faut donc construire des fonctions d'équilibres. On doit avoir :

$$\begin{cases} Pf = Pf^{eq} \\ P\Lambda f^{eq} = F(U) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_-^{eq} + f_0^{eq} + f_+^{eq} = U \\ \lambda_- f_-^{eq} + \lambda_0 f_0^{eq} + \lambda_+ f_+^{eq} = F(U) \end{cases}$$

Supposons que l'on ait une décomposition quelconque :

$F(U) = F_0^+(U) + F_0^-(U) + \lambda_0 U$. On vérifie aisément qu'alors les fonctions d'équilibre suivantes satisfont les conditions requises :

$$\begin{cases} f_-^{eq}(U) = -\frac{F_0^-(U)}{\lambda_0 - \lambda_-} \\ f_0^{eq}(U) = U - \left(\frac{F_0^+(U)}{\lambda_+ - \lambda_0} - \frac{F_0^-(U)}{\lambda_0 - \lambda_-} \right) \\ f_+^{eq}(U) = \frac{F_0^+(U)}{\lambda_+ - \lambda_0} \end{cases}$$

On montre la consistance de ce schéma de manière similaire à celle du D1Q2.

La stabilité L^2 se fait sous les conditions $\omega \in [0, 2]$ et $\min |\lambda_i| \geq \|F'\|_\infty$.

Pour définir totalement le schéma, il nous reste à donner une décomposition de F en F_0^+ et F_0^- .

On prend maintenant $\lambda_+ = -\lambda_- = \lambda$ et $\lambda_0 = 0$.

On définit le schéma D1Q3 upwind comme étant le schéma D1Q3 pour lequel :

$$\begin{cases} F_0^-(U) = \int_0^U F'(x) \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(F'(x)) dx \\ F_0^+(U) = \int_0^U F'(x) \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(F'(x)) dx \end{cases}$$

On a bien $F(U) = F_0^+(U) + F_0^-(U)$. En fait F_0^+ et F_0^- peuvent être vues comme des parties positives et négatives du flux, c'est une généralisation du cas linéaire.

3 Diffusion

On s'intéresse maintenant à l'approximation de la solution de l'EDP :

$$\partial_t \rho = \mu \partial_{xx} \rho \quad (5)$$

avec $\mu > 0$.

On introduit

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, S \in M_3(\mathbb{R}), P = (1 \ 1 \ 1), \Lambda = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}, \varepsilon > 0, R > 0 \text{ tels que } Pf = \rho \text{ et :}$$

$$\partial_t f + \frac{\Lambda}{\varepsilon} \partial_x f = \frac{R}{\varepsilon^2} (Sf - f) \quad (6)$$

On notera parfois $f^{eq} = Sf$.

On supposera que l'on vérifie :

$$PSf = Pf = \rho \quad (7)$$

$$P\Lambda Sf = 0 \quad (8)$$

$$P\Lambda^2 Sf = \alpha \rho \quad (9)$$

$$\text{avec } R = \frac{\alpha}{\mu}.$$

Proposition : A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, ρ vérifie l'équation (5).

On définit le modèle D1Q3 en prenant :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \omega & \omega & \omega \\ \omega_0 & \omega_0 & \omega_0 \\ \omega & \omega & \omega \end{pmatrix}, \alpha = (1 - \omega_0)\lambda^2, \omega_0 + 2\omega = 1$$

On écrit alors $f = \begin{pmatrix} f_+ \\ f_0 \\ f_- \end{pmatrix}$. On remarque qu'on a $f_0^{eq} = \omega_0 \rho$ et $f_{\pm}^{eq} = \omega \rho$. On a

enfin :

$$\begin{cases} \partial_t f_{\pm} \pm \frac{\lambda}{\varepsilon} \partial_x f_{\pm} = \frac{R}{\varepsilon^2} (f_{\pm}^{eq} - f_{\pm}) \\ \partial_t f_0 = \frac{R}{\varepsilon^2} (f_0^{eq} - f_0) \end{cases}$$

On définit maintenant le schéma. On procède en 2 étapes comme précédemment :

$$\text{- transport : } f_i^*(x) = f_i^n \left(x - \frac{\nu_i}{\varepsilon} \Delta t \right)$$

$$\text{- relaxation : } \frac{f^{n+1} - f^*}{\Delta t} = \theta R \frac{f^{eq,n+1} - f^{n+1}}{\varepsilon^2} + (1 - \theta) R \frac{f^{eq,*} - f^*}{\varepsilon^2}, \theta \in [0, 1].$$

Or comme précédemment, $f^{eq,n+1} = f^{eq,*}$, l'étape se réécrit donc :

$$f^{n+1} = f^* + \Omega (f^{eq,*} - f^*), \quad \Omega = \frac{R\Delta t}{\varepsilon^2 + R\theta\Delta t}$$

Proposition : Avec $\varepsilon = \sqrt{\Delta t}$ et $\theta = \frac{1}{2}$, le schéma est consistant en temps avec :

$$\partial_t \rho = \mu \partial_{xx} \rho + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (10)$$

Dans le cas de la convection on a une diffusion en Δt à cause du splitting. Ici il génère une erreur de diffusion en $\frac{\Delta t}{\varepsilon^2}$, c'est pour cela qu'avec $\varepsilon = \sqrt{\Delta t}$ la diffusion est du bon ordre. Ensuite on règle le coefficient grâce à θ , qui est le bon avec $\theta = \frac{1}{2}$. On utilise la diffusion numérique du schéma pour calculer une vraie équation de diffusion.

4 Convection diffusion

On veut résoudre :

$$\partial_t \rho + \partial_x F(\rho) = S(\rho) + \mu \partial_{xx} \rho \quad (11)$$

On introduit $f, f^{eq}, g, \Lambda, \varepsilon, R$ tels que :

$$\partial_t f + \frac{\Lambda}{\varepsilon} \partial_x f = \frac{R}{\varepsilon^2} (f^{eq} - f) + g \quad (12)$$

et $\sum f_i = \rho$.

$P = (1 \dots 1)$

On impose :

$$\begin{aligned} P f^{eq} &= \rho \\ \frac{P \Lambda f^{eq}}{\varepsilon} &= F(\rho) \\ P \Lambda^2 f^{eq} &= \alpha \rho \\ \Lambda^3 &= \lambda^2 \Lambda \\ P g &= S(\rho) \\ P \Lambda g &= 0 \end{aligned}$$

En posant $u = \frac{P \Lambda f}{\varepsilon}$, on a alors :

$$\partial_t \rho + \partial_x u = S(\rho) \quad (13)$$

$$\partial_t u + \partial_x \frac{P \Lambda^2 f}{\varepsilon^2} = \frac{R}{\varepsilon^2} (F(\rho) - u) \quad (14)$$

Proposition : A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, avec $R = \frac{\alpha}{\mu}$, on a :

$$\partial_t \rho + \partial_x F(\rho) = S(\rho) + \mu \partial_{xx} \rho + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Pour le schéma, on procède toujours de la même manière, mais on doit cette

fois rajouter le terme source :

$$\text{-transport : } f_i^*(x) = f_i^n \left(x - \frac{V_i}{\varepsilon} \Delta t \right)$$

$$\text{-relaxation : } f^{**} = f^* + \Omega(f^{eq,*} - f^*) \text{ avec } \Omega = \frac{R\Delta t}{\varepsilon^2 + R\theta\Delta t}$$

$$\text{-terme source : } f^{n+1} = f^{**} + \Delta t g^*.$$

Proposition : Avec $\varepsilon = \sqrt{\Delta t}$ et $\theta = \frac{1}{2}$ le schéma est consistant avec :

$$\partial_t \rho + \partial_x F(\rho) = S(\rho) + \alpha \partial_{xx} \rho + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Conclusion

Après avoir déterminé des solutions théoriques de nos équations, nous avons pu mettre en place un schéma pour approximer des équations de convection diffusion. Un des intérêts de cette approche est qu'elle nous fournit une multitude de schémas pour chaque équation. On peut donc choisir les schémas et faire varier les paramètres selon les besoins, pour s'adapter au mieux. De plus ces schémas sont très simples, ce qui permet une bonne efficacité pour les applications industrielles. Enfin nous verrons lors de la soutenance que ces schémas se révèlent efficaces, et que la construction même du schéma est très intéressante.

Références

- [1] R. Ahmed. Numerical schemes applied to the burgers and buckley-leverett equations. *University of Reading, Department of Mathematics*, 2004.
- [2] E. Franck L. Navoret C. Courtes, D. Coulette. Vectorial kinetic relaxation model with central velocity. application to implicit relaxations schemes. (En cours de publication).
- [3] S. Dellacherie. Construction and analysis of lattice boltzmann methods applied to a 1d convection-diffusion equation. *HAL*, 2012.
- [4] B. Després. *Lois de Conservations Eulériennes, Lagrangiennes et Méthodes Numériques*. Springer, 2010.
- [5] F. Dubois. Stable lattice boltzmann schemes with a dual entropy approach for monodimensional nonlinear waves. *Elsevier*, 2012.
- [6] R. F. Umbara E. B. Setiawan, D. Tarwidi. Numerical simulation of traffic flow via fluid dynamics approach. *International Journal of Computing and Optimization*, 3(1) :93–104, 2016.
- [7] B. Graille. Approximation of mono-dimensional hyperbolic systems : A lattice boltzmann scheme as a relaxation method. *Elsevier*, 2014.

- [8] Shi Jin Zhouping Xin S. Jin, Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math*, 48 :235–277, 1995.
- [9] T. S. Zhao Zhenhua Chai. Lattice boltzmann model for the convection-diffusion equation. *Physical Review*, 2013.

Annexe

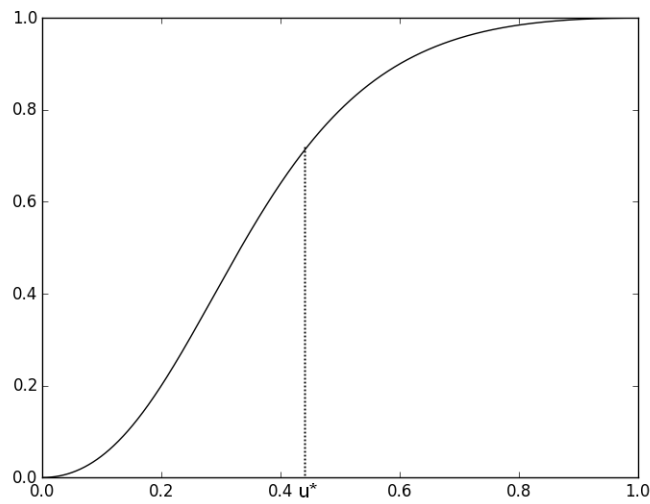


FIGURE 1 – Annexe : tracé du flux de l'équation de Buckley-Leverett sur $[0,1]$