

nergie atomique - energies alternatives

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

Schémas « asymptotic preserving » pour des modèles à deux moments sur maillages non structurés

**Emmanuel Franck** 

CEA/DAM/DIF/DSSI - Paris 6/LJLL

07 décembre 2010

Encadrants : Christophe Buet et Bruno Després

Emmanuel Franck - GTT

### œ

#### vergie atomique - energies alternatives

### Introduction

- 2 Schéma classique pour le modèle linéaire
- Introduction
- Schéma classique pour le modèle linéaire
- Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire
- Résultats numériques
- Schéma pour le modèle  $M^1$
- Conclusion

- 3 Schéma aux nœuds pour le modèle linéaire
- 4 Résultats numériques
- 5 Schéma pour le Modèle M<sup>1</sup>
- 6 Conclusion

## Contexte et objectifs : équation de transport

œ

nergie atomique - energies alternatives

#### Introduction

- Schéma classique pour le modèle linéaire
- Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire
- Résultats numériques
- Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

- Fusion par Confinement Inertiel : Porter un mélange gazeux aux conditions d'allumage thermonucléaire en utilisant un ensemble de faisceaux laser.
- Hydrodynamique Radiative : Interaction entre le gaz modèlisé par les équations d'Euler et le rayonnement modélisé par une équation dite de transport.
- Équation de transport : Soit f(x, v, t) ≥ 0 la fonction distribution associée aux particules situées en x et animées d'une vitesse v. On considère une équation de la forme :

$$\partial_t f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sigma_S Q(f, f) + \sigma_a S(f),$$

où Q(f, f) est un opérateur de collision (ou scattering) et S(f) un terme d'absorption/émission.

### Contexte et objectif : Limite de diffusion

### œ

nergie atomique - energies alternatives

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

- Limite de diffusion : Ces équations de transport ont, dans certains régimes, la propriété de tendre vers une équation de diffusion sur le premier moment de f.
- Exemple : Limite de diffusion hors équilibre II s'agit de la limite en temps grand, avec σ<sub>S</sub> >> σ<sub>a</sub>. On commence par "rescaler" l'équation :

$$\tilde{t} = \varepsilon t, \ \tilde{\sigma_S} = \varepsilon \sigma_S, \ \tilde{\sigma_a} = (1/\varepsilon)\sigma_a.$$

ceci donne

$$\partial_t f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{v} \cdot \nabla f(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma_S Q(f,f) + \sigma_a S(f).$$

#### Proposition : Limite de diffusion

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 l'équation précédente a pour limite, dans le cas où  $\sigma_a = 0$ ,

$$\partial_t E(t,\mathbf{x}) - \frac{1}{\sigma_S} \triangle E(t,\mathbf{x}) = 0,$$

avec 
$$E(t,x) = \int_{\Omega} f(t,x,\mathbf{v}) dv$$

### Modèles aux moments

æ

nergie atomique - energies alternatives

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

- Modèles simplifiés : de type hyperbolique appelés modèles aux moments qui ne dépendent que des variables d'espace.
- Modèles simplifiés :
  - Modèle Pn : on développe l'équation de transport sur une base d'harmoniques sphériques.
  - Modèles Sn : on discrétise en vitesse ( par exemple avec une formule de quadrature sur l'opérateur de collision).
  - Modèle Mn : il s'agit du modèle Pn non linéaire fermé en minimisant l'entropie radiative.

Exemple de modèle P1 :

$$\partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$
  
 $\partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} \mathbf{F}$ 

### Objectif de la thèse

L'objectif est donc de construire des schémas de type Volumes Finis pour le plus de modèles simplifiés possibles captant la limite de diffusion sur des maillage non structurés.

## Principe des méthodes volumes finis classique

nergie atomique - energies alternative

#### Introduction

- Schéma classique pour le modèle linéaire
- Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire
- Résultats numériques
- Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>
- Conclusion

- Méthode classique pour traiter les systèmes de lois de conservation du type  $\partial_t \mathbf{u} + \partial_x f(\mathbf{u}) + \partial_y g(\mathbf{u}) = 0.$
- Elle consiste à intégrer l'équation sur un maillage afin d'utiliser le théorème de flux-divergent

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}(t, x, y) dx dy + \int_{\Omega_j} \partial_x f(\mathbf{u}) + \partial_y g(\mathbf{u}) = 0$$
$$= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_j} \mathbf{u}(t, x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega_j} f(\mathbf{u}) n_j^{\mathsf{x}} + g(\mathbf{u}) n_j^{\mathsf{y}} = 0$$

avec  $\mathbf{n}_j = (n^x_j, n^y_j)$  la normale sortante,  $l_{jk}$  longueur d'une arête.

• On définit notre inconnu  $\mathbf{u}_j = \int_{\Omega_j} \mathbf{u}(t, x, y)$  la moyenne de la solution dans la maille.

$$\Omega_{j} \left| \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n}}{\Delta t} + \sum_{k} l_{jk} \left( f_{jk}^{*} n_{j}^{x} + g_{jk}^{*} n_{j}^{y} \right) = 0.$$
 (1)

- La méthode consiste à constuire un flux numérique (f<sup>\*</sup><sub>jk</sub>n<sup>x</sup><sub>j</sub> + g<sup>\*</sup><sub>jk</sub>n<sup>y</sup><sub>j</sub>) qui approche correctement f(u)n<sup>x</sup> + g(u)n<sup>y</sup>.
- Dans cette formulation on calcule les flux aux milieux des arêtes.

### Résultats dans le cas 1D

œ

ergie atomique - energies alternatives

#### Introduction

- Schéma classique pour le modèle linéaire
- Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire
- Résultats numériques
- Schéma pour le modèle  $M^1$

Conclusion

- Erreur de consistance du schéma **upwind** classique :  $O\left(rac{\Delta x}{arepsilon}+\Delta t
  ight)$
- Erreur de consistance du schéma de Jin-Levermore :
  - pour la première équation :  $O\left(\Delta x^2 + \varepsilon \Delta x + \Delta t\right)$ • pour la seconde équation :  $O\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon} + \Delta t\right)$
- Erreur de consistance du schéma de Gosse-Toscani :  $O(\Delta x + \Delta t)$ 
  - $\Rightarrow$  Conclusion : Les schémas de Jin-Levermore et Gosse-Toscani sont AP au sens où leurs erreurs de consistance ne dependent pas de  $\varepsilon$ .
- Le schéma de Jin-Levermore avec la discrétisation du terme source suivante : <sup>1</sup>/<sub>2</sub>(F<sub>j+1/2</sub> + F<sub>j-1/2</sub>) est équivalent au schéma de Gosse-Toscani.
  - $\Rightarrow$  **But :** Construire l'équivalent 2D du schéma de Jin-Levermore et Gosse-Toscani en utilisant l'équivalence précédente.



energie atomique - energies alternatives

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

### Schéma classique pour le modèle linéaire

### 1er cas : Modèle $P^1$

œ

nergie atomique - energies alternatives

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

Ce système est obtenu à partir de l'équation de transport avec  

$$Q(f, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) dv'.$$

• Limite asymptotique : en utilisant un développement de Hilbert, on obtient la limite :  $\partial_t E - \frac{1}{3\sigma_S} \Delta E = 0.$ 

 $\begin{cases} \partial_t E + \frac{1}{\varepsilon} \nabla . \mathbf{F} = 0\\ \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{3\varepsilon} \nabla E = -\frac{\sigma_S}{\varepsilon^2} \mathbf{F} \end{cases}$ 

- Dans la suite, on étudiera l'équation de la chaleur hyperbolique qui correspond au modèle P<sup>1</sup> sans le coefficient <sup>1</sup>/<sub>3</sub>.
- Ce système est équivalent à l'équation du télégraphe :

$$\partial_{tt}E + \frac{1}{\varepsilon}\partial_tE = \frac{1}{\varepsilon}\triangle E.$$

## Notations



- nergie atomique energies alternatives
- On définit les notations pour les formulations volumes finis aux arêtes et aux nœuds



## Extension méthode de Jin et Levermore en 2D

œ

- nergie atomique energies alternatives
- Principe : Modifier le schéma Upwind en incorporant les états stationnaires du système avec une construction implicite des flux. Quand ε tend vers 0, ∇E = −(1/ε)F est non négligeable. Or, l'approximation constante par maille ignore cette variation. On veut donc l'insérer à l'aide des formules de Taylor

$$\left\{ egin{array}{ll} E_j\simeq E_{jk}-rac{\sigma}{arepsilon}(\mathbf{u_{jk}},\mathbf{x_j}-\mathbf{x_{jk}})\ E_k\simeq E_{jk}-rac{\delta}{arepsilon}(\mathbf{u_{jk}},\mathbf{x_k}-\mathbf{x_{jk}}). \end{array} 
ight.$$

On couple cela au solveur acoustique classique pour obtenir l'expression des flux

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathsf{F}_{j}\mathsf{n}_{jk} + \mathit{E}_{j} = \mathsf{F}_{jk}\mathsf{n}_{jk} + \mathit{E}_{jk} - (\sigma/\varepsilon)(\mathsf{F}_{jk}.(x_{j} - x_{jk})) \\ \mathsf{F}_{k}\mathsf{n}_{jk} + \mathit{E}_{k} = \mathsf{F}_{jk}\mathsf{n}_{jk} - \mathit{E}_{jk} + (\sigma/\varepsilon)(\mathsf{F}_{jk}.(x_{k} - x_{jk})). \end{array} \right.$$

• Hypothèse : On suppose que le maillage satisfait la condition de Delaunay et que le centre de maille est le centre du cercle circonscrit. Alors :

$$(\mathbf{x_{jk}} - \mathbf{x_j}) = d_{jk}\mathbf{n_{jk}}$$
 et  $(\mathbf{x_{jk}} - \mathbf{x_k}) = -d_{kj}\mathbf{n_{jk}}.$ 

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

### Schéma « asymptotic preserving »2D

enerale atomique - enerales alternativ

#### Proposition : Schéma de Jin et Levermore

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

$$|\Omega_{j}| \frac{E_{j}^{n+1} - E_{j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k} l_{jk} \mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk} = 0$$

$$|\Omega_{j}| \frac{F_{1,j}^{n+1} - F_{1,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k} l_{jk} E_{jk} n_{jk}^{\mathsf{x}} = -|\Omega_{j}| \frac{\sigma}{\varepsilon^{2}} F_{1,j}^{n}$$

$$|\Omega_{j}| \frac{F_{2,j}^{n+1} - F_{2,j}^{n}}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k} l_{jk} E_{jk} n_{jk}^{\mathsf{y}} = -|\Omega_{j}| \frac{\sigma}{\varepsilon^{2}} F_{2,j}^{n},$$

$$(2)$$

avec les flux

$$\mathbf{F}_{jk} \cdot \mathbf{n}_{jk} = \frac{(\mathbf{F}_{j} + \mathbf{F}_{k})\mathbf{n}_{jk} + (E_{j} - E_{k})}{2 + (\sigma/\varepsilon)(d_{jk} + d_{kj})}$$

$$E_{jk} = \frac{(\mathbf{F}_{j}\mathbf{n}_{jk} + E_{j})(1 + d_{kj}(\sigma/\varepsilon)) - (\mathbf{F}_{k}\mathbf{n}_{jk} - E_{k})(1 + d_{jk}(\sigma/\varepsilon))}{2 + (\sigma/\varepsilon)(d_{jk} + d_{kj})}.$$
(3)

## Limite de diffusion : Schéma VF4

Limite asymptotique du schéma de Jin et Levermore

$$\mid \Omega_j \mid \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\triangle t} - \sum_k l_{jk} \frac{E_k^n - E_j^n}{d(x_j, x_k)} = 0$$

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

Ce schéma est appelé schéma VF4.

- On obtient un schéma AP, mais il existe plusieurs problèmes :
  - Le schéma limite VF4 a toutes les bonnes propriétés mais ne converge que sur les maillages cartésiens ou triangulaires avec les angles inférieurs à 90°.
    - La CFL est de l'ordre de  $\triangle t \ll \varepsilon h$ , où h est le pas du maillage.
- **Conclusion :** Une écriture classique du schéma de volumes finis aux arêtes ne permet pas d'obtenir un schéma AP sur maillage non structuré.

## Exemple de non convergence du schéma VF4

Cas test : Solution fondamentale de la chaleur avec comme condition initiale la solution fondamentale aux temps : initial t=0.001, final t=0.011.



## Qu'est ce qu'un bon schéma AP?



#### ergie atomique - energies alternatives

#### Introduction

#### Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

- D'après les résultats précédents, on souhaite :
  - un schéma limite de diffusion valable sur maillage non structuré et si possible préservant le principe du maximum,
  - un schéma implicite pour lever la CFL très restrictive,
  - une méthode extensible en 3D (problème des faces non coplanaires),
  - un schéma capable de traiter un σ variable,
  - un schéma pas trop coûteux ou parallélisable.
- L'idée principale, pour résoudre ce problème, est d'utiliser une formulation aux nœuds. On reconstruirait un gradient aux nœuds au lieu d'un gradient dans la direction normale qui engendre des conditions géométriques sur le maillage.



energie atomique - energies alternatives

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

### Schéma aux nœuds pour le modèle linéaire

### Construction du schéma aux noeuds

iergie atomique - energies alternatives

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

- Idée : Utiliser le schéma aux nœuds "GLACE" construit pour Euler linéarisé, analogue au modèle P<sup>1</sup> et coupler ce schéma à la méthode de Jin et Levermore.
- Difficulté : On ne connaît pas le schéma limite de diffusion, ce qui peut mener à la construction d'un nouveau schéma de diffusion à étudier.
- Solveur de Euler linéarisé :

$$\begin{cases} E_{jr} - E_j = (\mathbf{F_j} - \mathbf{F_r}, \mathbf{n_{jr}}) \\ \sum_{j} l_{jr} E_{jr} \mathbf{n_{jr}} = 0. \end{cases}$$

#### Solveur au noeud

En appliquant la méthode de Jin et Levermore, on obtient le solveur suivant :

$$\begin{cases} E_{jr} - E_j = (\mathbf{F}_j - \mathbf{F}_r, \mathbf{n}_{jr}) - \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{F}_r, \mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j) \\ \sum_j l_{jr} (\mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon} (\mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j))) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} (E_j + (\mathbf{F}_j, \mathbf{n}_{jr})) \mathbf{n}_{jr}. \end{cases}$$

### Inversibilité de la matrice nodale

œ

• Les flux existent si la matrice associée au solveur nodal est inversible.

Résultat de C. Mazeran : Les matrices

$$\sum_{j} I_{jr}(\mathbf{n_{jr}} \otimes \mathbf{n_{jr}})$$

sont définies positives, si toutes les mailles sont non dégénérées.

$$A_r = \sum_j l_{jr} \mathbf{n_{jr}} \otimes (\mathbf{x_r} - \mathbf{x}_j)$$

- Introduction
- Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

- Pas de résultat complet pour la deuxième matrice, mais un résultat partiel.
- Idée : Essayer d'écrire  $A_r$  comme une perturbation de  $I_d V$  et montrer que  $A_r$  reste définie positive selon la déformation.

#### er résultat.

On peut écrire notre matrice sous la forme

$$\begin{aligned} A_r &= idV - \frac{1}{4}\sum_j P_j, \\ \text{où } P_j &= \mathbf{v}_{j+1/2}^{\perp} \otimes \mathbf{v}_{j+1/2} - \mathbf{u}_{j+1/2}^{\perp} \otimes \mathbf{u}_{j+1/2} \\ \text{et } \mathbf{v}_{j+1/2} &= (\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_{j+1/2}) \text{ et } \mathbf{u}_{j+1/2} = (\mathbf{x}_{j+1/2} - \mathbf{x}_j) \end{aligned}$$

### Inversibilité de la matrice nodale

000

 $(x, A_r x) \ge ||x||^2 (||I_d V|| - \frac{1}{4} ||P||)$ 

 Soient x<sub>j</sub> le centre de maille, x<sub>j+1/2</sub> le centre de l'arête. On pose V<sub>Ti</sub> le volume du polygône formé par ces points et par le nœud considèré.

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

### Résultat

Si la condition suivante est vérifiée la matrice est definit positive.

$$V_{\mathcal{T}_{j}} \geq rac{1}{4} (\parallel { t x}_{j+1/2} - { t x}_{j-1/2} \parallel \parallel { t x}_{j} - rac{1}{2} ({ t x}_{j+1/2} - { t x}_{j-1/2})) \parallel$$

- **Maillage triangulaire** : Dans le cas du centre de gravité un résultat quantitatif montre que la matrice est définie positive si les angles sont superieures a 10 degrés.
- Ce résultat est une condition suffisante et très sous optimal.

## Limite de diffusion



nergie atomique - energies alternatives

 On utilise un développement de Hilbert sur le schéma aux nœuds pour obtenir un schéma limite.

### Proposition

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

Le schéma limite est :

$$\begin{cases} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\triangle t} + \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r.\mathbf{n}_{jr}) = 0\\ \sigma(\sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)) \mathbf{F}_r = \sum_j l_{jr} E_j \mathbf{n}_{jr}. \end{cases}$$

- Numériquement le schéma limite marche sur maillage non structuré.
- Le problème du schéma aux arêtes venait de la reconstruction du gradient dans la direction normale, ce qui était possible sous certaines conditions de maillage. Ici on reconstruit un gradient complet qui permet de lever la contrainte géométrique.

## Etude du schéma de diffusion

On définit les erreurs suivantes :

$$\| e(t) \|_{L^{2}(\Omega)} = \left( \sum_{j} | \Omega_{j} | (E_{j}(t) - E(x_{j}, t))^{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\| f(t) \|_{L^{2}([0, t] \times \Omega)} = \left( \int_{0}^{t} \sum_{r} | V_{r} | (\mathbf{F}_{r}(t) - \nabla E(x_{r}, t))^{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

#### 「héoreme

Si il existe une constante  $\alpha$  telle que  $A_r^s \ge \alpha V_r$  alors le schéma limite de diffusion semi-discret est convergent pour tout temps T > 0.

$$| E(t) ||_{L^{2}(\Omega)} + || f(t) ||_{L^{2}([0,t] \times \Omega)} = C(T)h$$

- Idée de la preuve : étude classique de consistance + lemme de Gronwall.
- Le schéma semi-discret est décroissant en norme L<sup>2</sup>.
- La matrice associée au schéma implicite en temps est inversible et le schéma est stable en norme L<sup>2</sup>.

### Variantes du schéma aux noeuds

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle M<sup>1</sup>

Conclusion

Idée : construction d'un nouveau schéma équivalent à Gosse-Toscani en 2D nommé JL-(b)

$$\begin{cases} |\Omega_j| \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr} (\mathbf{F}_r.\mathbf{n}_{jr}) = 0 \\ |\Omega_j| \frac{\mathbf{F}_j^{n+1} - \mathbf{F}_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r G_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j) F_r \end{cases}$$

et utilisation d'une notation tensorielle du schéma.

$$\begin{cases} G_{jr} = l_{jr}E_{j}\mathbf{n}_{jr} + \widehat{\alpha}_{jr}(\mathbf{F}_{j} - \mathbf{F}_{r}) - \frac{\sigma}{\varepsilon}\widehat{\beta}_{jr}\mathbf{F}_{r} \\ \sum_{j}\widehat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon}\widehat{\beta}_{jr}\mathbf{F}_{r} = \sum_{j}l_{jr}E_{j}\mathbf{n}_{jr} + \widehat{\alpha}_{jr}\mathbf{F}_{j}, \quad ou$$

$$\widehat{\alpha}_{jr} = I_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes \mathbf{n}_{jr}, \ \widehat{\beta}_{jr} = I_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_j)$$

• On peut prendre 
$$\widehat{\beta}_{jr} = I_d V_r$$

#### <sup>D</sup>ropriété

Le JL-(b) est stable en norme  $L^2$  pour les tenseurs présentés. Les discrétisations implicites en temps associées sont stables en norme  $L^2$ 



energie atomique - energies atternatives

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

#### Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

### **Résultats numériques**

## Exemple maillage non structuré

œ

nergie atomique - energies alternatives

Deux exemples classiques de maillages non structurés.



Conclusion

## Résultats pour schéma de diffusion aux nœuds

œ

nergie atomique - energies atternatives

Cas test 1 : Solution fondamentale de la chaleur avec comme condition initiale la solution fondamentale aux temps : initial t=0.001, final t=0.011.

Maillage	Cartesien	aléatoire quad.	Kershaw
q	2.00	1.98	2.00

Introduction

Schéma

classique pour

le modèle

linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

#### Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

Maillage	Triang. rég.	Triang. rég. mod.	aléatoire triang.
q	2.00	1	1.32

### Cas test 2 : $u(t, x, y) = \exp(-2\pi^2 t) \cos(\pi x) \cos(\pi y)$ , $\Omega = ]0, 2[ \times ]0, 2[$ .

Maillage	Cartesien	aléatoire quad.	Kershaw
q	2.08	2.07	2.85

Maillage	Triang. rég.	Triang. rég. mod.	aléatoire triang.
q	2.23	1.02	1.25

D'autre maillages ont été testés y compris les maillages polygonaux, les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes.

Emmanuel Franck - GTT

## Résultat pour le modèle $P^1$



• Pour le régime de transport  $\varepsilon = O(1)$  et  $\sigma = O(1)$  le schéma converge.

- Ordre 1 classique.
- Régime asymptotique : Cas test pour la diffusion.



Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

#### Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

•  $\varepsilon$  suffisament petit, on retrouve l'ordre 2.

# Résultat pour le modèle $P^1$



nergie atomique - energies atternatives

Conclusion

Cas test avec  $\sigma$  variable. Le domaine est un carré de taille 1 avec deux petit carrés à l'interieur.  $\sigma = 10000$  dans les carrés internes et  $\sigma = 1$  ailleurs. On utilise un maillage aléatoire.



 Le modèle P<sup>1</sup> est un modèle ondulatoire en dehors des carrés qui tend vers une équation de diffusion de coefficient 1/σ dans les carrés.



energie atomique - energies alternatives

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

### Schéma pour le modèle $M^1$

# Modèle $M^1$

Œ

Modèle hyperbolique non linéaire a deux moments :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla . \mathbf{F} = \mathbf{0} \\ \partial_t \mathbf{F} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla (\hat{P}) = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \mathbf{F}, \end{cases}$$
(4)

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

Conclusion

$$\hat{P} = rac{1}{2}((1-\chi(\mathbf{f}))\mathbf{Id} + (3\chi(\mathbf{f})-1)rac{\mathbf{f}\otimes\mathbf{f}}{\parallel\mathbf{f}\parallel})\mathbf{E},$$

et 
$$\mathbf{f} = \mid \mathbf{F} \mid / E$$
 ,  $\chi(\mathbf{f}) = rac{3+4\mathbf{f}^2}{5+2\sqrt{4-3\mathbf{f}^2}}$ 

avec le tenseur de pression suivant

• limite de diffusion : Équation de diffusion sur *E* avec un coefficient  $\frac{1}{3\sigma}$ .

#### ropriété

Principe du maximum pour le modèle  $M^1$ 

$$\mathsf{E} \ge 0, \qquad rac{|\mathsf{F}|}{E} \le 1$$

 La positivité de E est une propriété de l'équation de transport mais pas du modèle P<sup>1</sup>.

Emmanuel Franck - GTT

## Lien avec la dynamique des gaz

Œ

nergie atomique - energies atternatives

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

### Schéma pour le modèle $M^1$

Conclusion

 On réécrit le modèle M<sup>1</sup> comme un modèle de dynamique des gaz afin d'utiliser le schéma GLACE construit pour les équations Euler en coordonnées Lagrangienne.

 $\begin{cases} \partial_t \rho + \frac{1}{\varepsilon} div(\rho \mathbf{u}) = 0 & \text{Conservation de la masse} \\ \partial_t \rho \mathbf{v} + \frac{1}{\varepsilon} div(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla q = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \rho \mathbf{v} & \text{Cons. de la quantité de mouv.} \\ \partial_t \rho \mathbf{e} + \frac{1}{\varepsilon} div(\rho \mathbf{u} \mathbf{e} + q \mathbf{u}) = 0 & \text{Cons. de l'énergie totale} \\ \partial_t \rho s + \frac{1}{\varepsilon} div(\rho \mathbf{u} s) \ge 0 & \text{Inégalité entropique} \end{cases}$ 

$$F = \rho \mathbf{v} \text{ et } E = \rho e.$$
•  $q = \frac{1 - \chi}{2} E$ 
•  $\mathbf{u} = \frac{3\chi - 1}{2} \frac{\mathbf{f}}{|\mathbf{f}|^2} \text{ avec } \mathbf{f} = \frac{|\mathbf{v}_r|}{e_r}$ 

• Ici la densité est artificielle , elle n'intervient pas dans le modèle  $M^1$ .

• Pour obtenir le système précédent on utilise le lemme :

#### lemme

$$\mathbf{F} = u\mathbf{E} + qu \quad \text{et} \qquad \hat{P} = u \otimes \mathbf{F} + q\mathbf{I} \tag{5}$$

## Schéma Lagrange+projection

nerria atomicua - enercias alternativa

Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

### Schéma pour le modèle $M^1$

Conclusion

Le schéma GLACE est un schéma pour l'hydrodynamique lagrangienne, on doit le coupler avec une phase de projection.

$$\begin{cases} M_j \frac{\tau_j^{n+1} - \tau_j^n}{\delta t} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_r l_{jr}(\mathbf{u}_r, \mathbf{n}_{jr}) = 0\\ M_j \frac{\mathbf{v}_j^{n+1} - \mathbf{v}_j^n}{\delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r \mathbf{G}_{jr} = -\frac{\sigma}{\varepsilon^2} \sum_r k_r \widehat{\beta}_{jr} \mathbf{u}_r\\ M_j \frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\delta t} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_r (\mathbf{u}_r, \mathbf{G}_{jr}) = 0 \end{cases}$$

avec comme flux

$$\begin{cases} \mathbf{G}_{jr} = l_{jr}q_{j}\mathbf{n}_{jr} + r_{jr}\hat{\alpha}_{jr}(\mathbf{u}_{j} - \mathbf{u}_{r}) - \frac{\sigma}{\varepsilon}k_{r}\hat{\beta}_{jr}\mathbf{u}_{r} \\ (\sum_{j}r_{jr}\hat{\alpha}_{jr} + \frac{\sigma}{\varepsilon}k_{r}\hat{\beta}_{jr})\mathbf{u}_{r} = \sum_{j}l_{jr}q_{j}\mathbf{n}_{jr} + r_{jr}\hat{\alpha}_{jr}\mathbf{u}_{j} \end{cases}$$
(6)

et 
$$M_j = |\Omega_j|^{n+1} \rho^{n+1} = |\Omega_j|^n \rho^n$$
,  $k_r = \frac{2E_r |\mathbf{f_r}|^2}{(3\chi - 1)}$  et  $r_{jr} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{E_j}{3 + |\mathbf{u}|^2}$ 

 Projection : On advecte les variables avec un schéma aux nœuds et une vitesse u<sub>r</sub>.

## Entropie et principe du maximum

ergie atomique - energies atternatives

- Entropie physique du système :  $S = \frac{E^{3/4}(1-|\mathbf{u}|^2)}{(3+|\mathbf{u}|^2)^{3/4}}$
- En forulation lagrangienne le schéma est entropique si  $S_j'(t) \ge 0$ .

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

### Schéma pour le modèle $M^1$

Conclusion

#### emme

Le schéma est entropique si  $\hat{\beta}_{jr}$  est défini positif.

- Si le schéma est entropique, il preserve le principe du maximum de  $M^1$ .
  - <sup>1</sup> La matrice  $A_r = \sum_j l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r \mathbf{x}_j)$  est définie positive sur la plupart des maillages.  $\hat{\beta}_{jr} = l_{jr} \mathbf{n}_{jr} \otimes (\mathbf{x}_r \mathbf{x}_j)$  n'est défini positif que sur maillage Cartésien.
- On prendre le tenseur β<sub>jr</sub> = V<sub>jr</sub>A<sub>r</sub>/V<sub>r</sub> où V<sub>r</sub> volume de contrôle associé à un nœud et V<sub>jr</sub> la partie de V<sub>r</sub> associée à chaque maille.
- Sous une condition CFL, le schéma d'advection préserve le principe du maximum.

# Limite de diffusion



nergie atomique - energies atternatives

- Introduction
- Schéma classique pour le modèle linéaire
- Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire
- Résultats numériques
- Schéma pour le modèle  $M^1$

Conclusion

- La phase Lagrange donne en limite de diffusion un schéma non linéaire de coefficient  $\frac{1}{12\sigma}$ .
  - Il preserve la positivité de E (par limite).
- En limite de diffusion la vitesse,  $u_r$  est homogène à  $\frac{1}{4\sigma}\nabla E/E$ . Le schéma d'advection E avec cette vitesse donne un schéma de diffusion.
- L'addition des deux phases donne le bon coefficient de diffusion.

#### Résultats numériques

- Le schéma de diffusion issu de la phase Lagrange converge à un ordre proche de deux sur tous les maillages.
- Le schéma issu de la phase de projection converge a l'ordre 1.
- Le schéma préserve le principe du maximum contrairement au schéma linéaire issu de  $P^1$
- On utilise technique de monté en ordre MUSCL pour obtenir un schéma d'avection d'ordre 2.
- Le schéma de projection MUSCL avec limiteur de pente préserve la positivité de *E*.

## Conclusion et perspectives

œ

.....

- Introduction
- Schéma classique pour le modèle linéaire
- Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire
- Résultats numériques
- Schéma pour le modèle  $M^1$

#### Conclusion

#### Conclusion :

- Construction de schémas l'ordre 1, « asymptotic preserving »pour les deux modèles hyperboliques sur maillages non structurés.
- Preuve de convergence pour le schéma de diffusion linéaire.
- Convergence à l'ordre 2 des schémas limites.
- Préservation du principe du maximum pour le schéma du modèle M<sup>1</sup> et de sa limite.
- Absence de résultats complet sur les matrices nodales.
- Présence de modes parasites (peut être régler par redéfinition des normales).

#### • Perpectives :

- schéma pour des modèles linéaires généraux.
- estimation d'erreur indépendante de  $\varepsilon$  pour le schéma du modèle  $P^1$ .
- Schéma AP pour les équations de Maxwell relaxé.

### Prépublication

[1] Chritophe Buet, Bruno Després, Emmanuel Franck *Design of asymptotic preserving schemes for the telegraph equation on unsctructured meshes*, rapport Laboratoire Jacques-Louis Lions. UPMC 2010.

## Merci



energie atomique - energies atternatives

#### Introduction

Schéma classique pour le modèle linéaire

Schéma aux nœuds pour le modèles linéaire

Résultats numériques

Schéma pour le modèle  $M^1$ 

#### Conclusion

### Merci de votre attention