2 Différentielle du déterminant

Leçons 152, 215

Ref : [Rouvière] Exo 26 & Exo 94

Théorème 1 Le déterminant est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et sa différentielle est donnée par

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad d_M \det(H) = \operatorname{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(M)H\right).$$

Démonstration.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme quelconque, puisque les normes sont équivalentes. Le déterminant étant polynomial sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il y est donc de classe C^1 (et même C^∞).

Étape 1. Différentielle en l'identité.

On note I la matrice identité de taille n. On se donne $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on note $(\lambda_1, .., \lambda_n)$ ses valeurs propres (complexes). On a alors pour $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcl} \det(I+tH) & = & \prod_{i=1}^{n} 1 + t\lambda_i \\ & = & 1 + t\operatorname{Tr}(H) + O(t^2) \\ \det(I+tH) & = & 1 + t\operatorname{Tr}(H) + o(t) \end{array}$$

Par définition de la différentielle, on a donc $d_I \det = \operatorname{Tr}$.

Étape 2. Différentielle en une matrice inversible.

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, et $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On se ramène au cas de l'identité :

$$\begin{array}{rcll} \det(M+H) & = & \det(M(I+M^{-1}H)) & \text{car } M \in GL_n(\mathbb{R}) \\ & = & \det(M)\det(I+M^{-1}H) & \\ & = & \det(M)(1+\operatorname{Tr}(M^{-1}H)+o(\|H\|)) & \text{d'après l'étape 1} \\ \det(M+H) & = & \det(M) + \operatorname{Tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H) + o(\|H\|) & \text{car } \det(M)M^{-1} = {}^t\mathrm{Com}(M) \end{array}$$

Donc on a une nouvelle fois la formule souhaitée.

Étape 3. Conclusion par densité.

Les matrices inversibles forment un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Or le déterminant est de classe C^1, donc sa différentielle est continue : comme l'étape 2 donne sa formule sur un ouvert dense, on peut la prolonger par continuité à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme les applications qui associent respectivement à une matrice sa transposée et sa comatrice sont elles aussi continues (car polynomiales), la formule obtenue est stable par continuité : on a bien

$$\forall M, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad d_M \det(H) = \operatorname{Tr}\left({}^t\mathrm{Com}(M)H\right).$$

□

Application 2 $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1, et son plan tangent en M est donné par

$$T_M SL_n(\mathbb{R}) = \left\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{Tr}(M^{-1}H) = 0\right\}.$$

Démonstration. Tout d'abord, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$, donc on peut bien parler de "sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$" comme quand on parle de "sous-variété de $\mathbb{R}^n$" [1]. On définit l'application

$$F : \left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \det(M) - 1 \end{array} \right. ,$$

qui est définie d'un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème précédent montre que F est polynomiale et que sa différentielle en $M \in GL_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$\forall H \in GL_n(\mathbb{R}) \quad d_M F(H) = \det(M)\operatorname{Tr}(M^{-1}H).$$

1. Ca permet de ne pas définir les variétés différentielles en elles-même...

En particulier, comme M est inversible, c'est une forme n-linéaire non nulle, donc surjective, ce qui prouve que F est une submersion, et donc $F^{-1}(\{0\}) = SL_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2-1. De plus, on sait que son plan tangent en $M \in SL_n(\mathbb{R})$ est le noyau de la différentielle de F en M :

$$T_M SL_n(\mathbb{R}) = \ker(d_M F) = \left\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M^{-1}H) = 0\right\}.$$

□