2 Escalier de Cantor

Leçons 228, 261(, 229)

Ref : [Briane-Pagès] 14.3

Toute fonction continue croissante dérivable de dérivée nulle sur $[0,1]$ est constante. Le but de ce développement est de fournir un contre-exemple dans le cas où l'hypothèse de dérivée nulle est affaiblie, au sens où l'on suppose seulement que la dérivée est nulle presque partout.

Théorème 1 (Construction de l'escalier de Cantor) Il existe une fonction f continue croissante sur $[0,1]$ telle que

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \\ f'=0 \quad \lambda\text{-presque partout sur } [0,1] \end{cases}$$

On peut également énoncer le même théorème dans une version probabiliste : on sait que si une loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, elle est à densité et sa fonction de répartition est continue. En revanche, la réciproque est fausse, et ce résultat en est un contre-exemple.

Théorème 2 Il existe une loi de probabilité continue qui n'est pas absolument continue.

Démonstration. L'idée consiste à construire une suite de fonctions continues qui converge absolument sur $[0,1]$, et qui possède les propriétés de f, sauf celle de dérivée nulle, puis de passer à la limite pour déduire l'existence de f. On se base sur la définition de l'ensemble de Cantor pour construire cette suite de fonctions.

Étape 1. Définition d'une suite de fonctions continues croissantes.

On définit la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $[0,1]$ par

$$\begin{cases} A_0=[0,1] \\ A_{n+1}=\dfrac{1}{3}A_n\cup\dfrac{1}{3}(2+A_n), \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

On vérifie immédiatement par récurrence que l'ensemble A_n est alors la réunion de 2^n intervalles disjoints de longueur 3^{-n} inclus dans $[0,1]$, et ainsi que $\lambda(A_n)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$. On peut démontrer que l'*ensemble de Cantor*, définit par

$$A=\bigcap_{n\geq 0}A_n,$$

est un borélien de mesure nulle mais équipotent à $[0,1]$. On pose alors pour $x\in[0,1]$

$$f_n(x):=\left(\frac{3}{2}\right)^n\int_0^x \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt.$$

Il est clair que $f_n(0)=0$, et, au vu de la remarque précédente, que $f_n(1)=1$. De plus, en tant qu'intégrale d'une fonction positive, f_n est une fonction continue croissante sur $[0,1]$ (comme on peut le voir pour les premiers éléments sur la figure 2.1). Au vu de ces propriétés, f_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,1]$ presque sûrement. La loi sous-jacente est, au vu de la formule, la loi uniforme sur A_n, qui est à densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Étape 2. Majoration de la différence entre deux éléments successifs.

On fixe $n\geq 0$ et on se donne l'un des 2^n intervalles compacts I qui compose A_n.

– Comme I est un intervalle de longueur 3^{-n} inclu dans A_n, on a

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n\int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt=2^{-n}.$$

– Comme $I\cap A_{n+1}$ est un la réunion de deux intervalles compacts et disjoints trois fois plus petits que I, on a $\lambda(I\cap A_{n+1})=\dfrac{2}{3}\lambda(A_n)=\dfrac{2}{3^{n+1}}$, et donc

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt=2^{-n}.$$

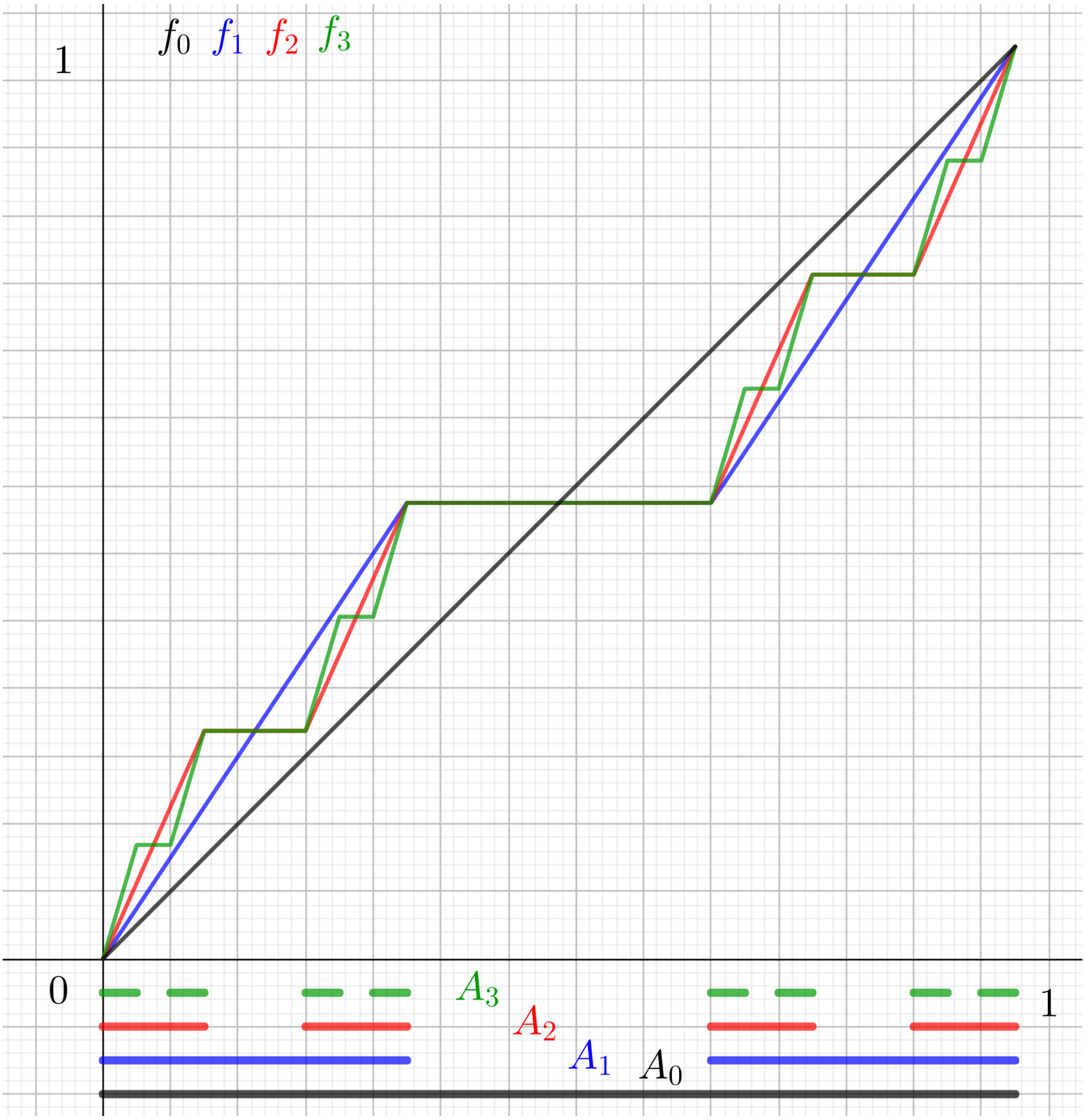

FIGURE 2.1 – Les premiers éléments de la suite approchant l'escalier de Cantor

Du point de vue probabiliste, les deux valeurs calculées sont $\mathbb{P}(X_n \in I)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1} \in I)$. On obtient le premier résultat en observant que la loi de X_n est uniforme sur A_n, qui est composé de 2^n intervalles disjoints de même taille que I, et le second en observant que la loi de X_{n+1} est uniforme sur A_{n+1}, et que chaque composante de A_n correspond à deux composantes de A_{n+1}, et donc que l'événement $X_{n+1} \in I$ correspond à la réunion de deux événements $X_{n+1} \in I_1$ et $X_{n+1} \in I_2$, où I_1 et I_2 sont deux des 2^{n+1} composantes de A_{n+1}, et que sa probabilité est donc $2{\times}2^{-(n+1)}$.

On remarque que comme $\mathbb{1}_{A_n}$ s'annule sur les $2^n - 1$ intervalles ouverts J qui composent A_n^c, f_n est constante sur ces intervalles ; de même f_{n+1} l'est puisque $A_n^c \subset A_{n+1}^c$. Ainsi, en utilisant le fait que les deux intégrales calculées plus haut sont égales, on obtient pour $x \in A_n^c$

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{I \subset A_n \cap [0,x]} \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\, dt \\ &= \sum_{I \subset A_n \cap [0,x]} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\, dt \\ f_n(x) &= f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

en faisant porter les sommes sur les intervalles I composant A_n.

Ce calcul s'écrit aussi

$$f_n(x) = \mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{I \subset A_n \cap [0,x]} X_n \in I\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{I \subset A_n \cap [0,x]} X_{n+1} \in I\right) = \mathbb{P}(X_{n+1} \leq x) = f_{n+1}(x).$$

Il reste à majorer la différence sur A_n. On se donne donc une nouvelle fois une composante I de A_n. En particulier, en posant $x_0 = \min(I)$, x_0 est également la borne supérieure d'un des intervalles ouverts J composant A_n^c, et comme f_n et f_{n+1} sont continues sur $J \cup I$ et égales sur J, on a $f_n(x_0) = f_{n+1}(x_0)$. On en déduit que pour $x \in I$, on a

$$\begin{aligned}
|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &\leq |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(x_0)| + |f_n(x_0) - f_n(x)| \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{x_0}^{x} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\ dt + \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \int_{x_0}^{x} \mathbb{1}_{A_n}(t)\ dt \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{I} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\ dt + \left(\frac{3}{2}\right)^{n} \int_{I} \mathbb{1}_{A_n}(t)\ dt \\
|f_{n+1}(x) - f_n(x)| &\leq 2^{-n+1}
\end{aligned}$$

On en déduit ainsi

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq 2^{-n+1},$$

résultat valable pour tout $n \geq 0$.

Étape 3. Conclusion par construction d'une limite.

La majoration uniforme de la différence entre deux termes successifs de la suite étant le terme général d'une série convergente, on en déduit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace complet des fonctions continues sur le compact $[0,1]$ (muni de la norme uniforme). Donc elle converge dans cet espace : c'est dire que la suite de fonction f_n converge uniformément vers une certaine fonction f, qui est donc nécessairement continue croissante sur $[0,1]$, et qui vérifie

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

Comme par construction, pour $m \geq n$, A_n^c est inclus dans A_m^c, et on peut donc généraliser le raisonnement de l'étape 2 pour en déduire que f_n et f_m coïncident sur A_n^c. On en déduit donc que f et f_n coïncident sur A_n^c. Or f_n y est constante, donc dérivable et de dérivée nulle. Ainsi, f est dérivable et de dérivée nulle sur l'ouvert A^c complémentaire de l'ensemble de Cantor, qui est la réunion des A_n^c. Elle vérifie donc bien

$$f' = 0 \quad \lambda\text{-presque partout},$$

puisque A est de mesure nulle. □

On peut construire une variable aléatoire X possédant f pour fonction de répartition (on peut appeler *loi de Cantor* cette loi de probabilité). Moralement, la construction nous incite à dire que X peut être vu comme un nombre choisi uniformément sur l'ensemble de Cantor A. Cela revient en fait à choisir aléatoirement le développement triadique d'un nombre compris entre $[0,1]$, en choisissant les chiffres de ce nombre en base 3 comme étant égal soit à 0, soit à 2, avec même probabilité : si Y_n sont des variables aléatoires indépendantes identiquement réparties de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \mathbb{P}(Y_1 = 2) = \frac{1}{2},$$

alors la variable aléatoire

$$X := \sum_{n \geq 1} \frac{Y_n}{3^n}$$

suit la loi de Cantor.