Exercices pour le cours de
Probabilités et intégration

A – Espaces mesurés et fonctions mesurables

Exercice [A-E1] – On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On introduit l'ensemble $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}$.

1) Donner tous les éléments de la tribu $\mathcal{P}(E)$.

2) A-t-on $\mathbb{Q} \in E$? $\mathbb{Q} \subset E$? $1 \in E$? $\{\mathbb{Q}\} \in \mathcal{P}(E)$? $\mathbb{N} \subset \mathcal{P}(E)$?

Exercice [A-E2] – Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble.

1) Donner l'ensemble des éléments de la tribu $\mathcal{P}(E)$.

2) Parmi les écritures suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $a \in E$	b) $a \subset E$	c) $\{a\} \in E$	d) $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$
e) $\{a\} \subset E$	f) $\emptyset \in E$	g) $\emptyset \subset E$	h) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(E)$

Exercice [A-E3] – Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ $(n > 2)$ un ensemble.

1) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Rappeler la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.

2) On rappelle qu'un singleton est un ensemble formé d'un seul élément. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de E ?

3) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant deux éléments ?

Exercice [A-E4] – Soit E un ensemble et soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus de parties de E.

1) Montrer que $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ est également une tribu de parties de E.

2) Donner un exemple simple de tribus $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ pour lesquelles $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ n'est pas une tribu de parties de E.

Exercice [A-E5] – Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E.

1) Donner les propriétés que doit vérifier l'ensemble $\mathcal{E}$ pour être une tribu de parties de E.

2) Quelles propriétés doit satisfaire la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ pour être une mesure ?

3) Soit $E = [0,1]$ et $\mathcal{E} = \{[0,1], \emptyset, [0,1/3], [1/3,1]\}$ un ensemble de parties de E. L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il une tribu (justifier votre réponse) ?

Exercice [A-E6] – On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on pose

$$\overline{\lim} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

1) Montrer que $\overline{\lim} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\underline{\lim} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ pour la suite $A_n = [-1/n, 1]$.

3) Même question avec $A_n = [-1, 1 + (-1)^n/n]$.

Exercice [A-E7] – Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. On pose $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}\}$.

1) Après avoir rappelé la définition d'une tribu engendrée, donner les tribus $\sigma(\mathcal{C}_1)$ et $\sigma(\mathcal{C}_2)$.

2) A-t-on $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$? $\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$?

Exercice [A-E8] – On se place sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Pour $-\infty < a < b < \infty$, on pose

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a + 1/n, b - 1/n] \text{ et } B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a - 1/n, b + 1/n].$$

1) Expliquer pourquoi A et B sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\lambda(A)$ et $\lambda(B)$. Justifier correctement la méthode utilisée.

Exercice [A-E9] – Un sac contient 6 boules : 3 boules rouges notées R_1, R_2 et R_3, 2 boules bleues notées B_1 et B_2 et une boule noire N. On tire simultanément 3 boules du sac.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour un tirage donné, on compte les points de la façon suivante : la boule noire rapporte 1 point, une boule bleue 0 point et une boule rouge, -1 points. On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui à chaque tirage ω associe le nombre total de points $X(\omega)$ obtenu (par exemple, pour un tirage ω d'une boule noire et deux boules rouges, $X(\omega) = 1 + (-1) + (-1) = -1$).

2) Quelles sont les valeurs possibles pour la fonction X ?

3) Quelle est la loi de X ?

Exercice [A-E10] – Un sac contient trois boules numérotées de 1 à 3. Les deux premières boules sont rouges et la troisième noire. On tire une boule du sac. Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser cette expérience aléatoire. Ecrire l'évènement "obtenir une boule rouge".

Exercice [A-E11] – Un sac contient les 5 lettres A, C, E, N et R. Vous tirez du sac les lettres une à une et les placez devant vous en conservant l'ordre du tirage. Proposer un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience et calculer la probabilité d'obtenir le mot CRANE ou le mot NACRE.

Exercice [A-E12] – On suppose que $n > 2$ personnes arrivent en même temps au guichet pour acheter des places de concert. Afin d'éviter toute bousculade, le responsable du guichet décide d'attribuer un numéro aléatoire aux n personnes : le numéro 1 prendra la première place dans la file et ainsi de suite.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience.

Parmi les n personnes, se trouve deux amis d'enfance.

2) Calculer la probabilité qu'ils soient distants de $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ places (*i.e.* qu'il y ait exactement $r - 1$ personnes entre eux) ?

3) Quelle est la distance la plus probable ? la moins probable ?

Exercice [A-E13] – L'ordinateur d'une banque envoie chaque mois un relevé de compte aux n clients de la banque. Une erreur de programmation fait mélanger aléatoirement les relevés de compte et les enveloppes portant l'adresse du client. Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser ce phénomène.

Exercice [A-E14] – Une urne contient quatre boules rouges, trois boules noires ainsi qu'une boule blanche. Les boules sont de plus numérotées. On tire en une seule fois trois boules.

1) Proposer un espace probabilisable permettant la description de cette situation.

2) Proposer une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable de la question 1). Calculer les probabilités des évènements suivants : $A =$ "on obtient au moins deux boules rouges" et $B =$ "on obtient deux boules de même couleur au moins".

Exercice [A-E15] – On tire simultanément n boules dans une urne contenant $N \geq n$ boules numérotées. Parmi ces N boules, il y a m boules rouges les autres étant noires.

1) Définir un espace probabilisé permettant de modéliser cette expérience.

2) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de X.

Exercice [A-E16] – On suppose que la proportion de tricheurs au jeu du pile ou face est de 1%. Vous jouez à ce jeu avec une personne qui parie pile et obtient pile. Modéliser cette expérience en utilisant un espace produit et calculer la probabilité que la personne ait triché au jeu.

Exercice [A-E17] – Un sac contient 3 boules rouges R_1, R_2 et R_3 et deux boules noires N_1 et N_2. On tire en une seule fois deux boules du sac.

1) Calculer le cardinal de l'espace Ω des réalisations possibles et donner toutes les réalisations possibles (un élément de Ω sera, par exemple, $\omega = (R_2, N_1)$).

2) Comme tribu associée à Ω, on prend la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par l'évènement $E = \{(N_1, N_2)\}$. Expliciter cette tribu $\mathcal{F}$.

3) Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, on définit la fonction $X : \Omega \mapsto \{0, 1, 2\}$ qui à tout élément de Ω associe le nombre de boules rouges. Cette fonction est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse).

4) Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{G}$ qui rend X mesurable ?

Exercice [A-E18] – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$ la partie entière de x. On introduit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$.

1) Donner un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \sigma(\mathcal{C})$.

2) Donner l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.

3) Après avoir rappelé la définition d'une fonction mesurable, montrer que f est mesurable.

4) Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{I}_{A_n}.$$

Vous préciserez la suite A_n, $n \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que $g := f \mathbb{I}_{]-4,4[}$ est une fonction étagée positive.

On munit l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de la mesure de Lebesgue λ.

6) Après avoir rappelé la définition de la mesure de Lebesgue, donner la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.

Exercice [A-E19] – On considère la suite de fonction $f_n : E :=]0,1] \times]0,1] \to \mathbb{R}$ avec pour tout $n \geq 1$ et $(x, y) \in E$,

$$f_n(x, y) := \sum_{i=1}^{3^n} \left(2 + \frac{1}{i}\right) \mathbb{I}_{A_{n,i}}(x, y),$$

où $A_{n,i}$ est le pavé

$$A_{n,i} := \left]\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right] \times \left]\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right].$$

1) Montrer que f_n, $n \geq 1$ est une suite de fonctions étagées positives (on munit les ensembles de départ et d'arrivée des tribus $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ respectivement).

2) Calculer l'intégrale de f_n par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}(E)$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\lambda = 0.$$

Exercice [A-E20] – Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et soit $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

1) Rappeler la définition d'une fonction mesurable. Que suffit-il de vérifier pour montrer que f est mesurable ?

Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f_t : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $x \in E$,

$$f_t(x) = \begin{cases} -t & \text{si } f(x) < -t, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq t, \\ t & \text{si } f(x) > t. \end{cases}$$

2) Ecrire l'ensemble $f_t^{-1}([0, 2t])$ sous la forme $f^{-1}(A)$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Donner l'ensemble $f_t^{-1}([-2t, 2t])$.

4) Montrer que f_t est mesurable.

Exercice [A-E21] – On considère la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ définie pour tout $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\mu(E) = \text{card}(E)$ où $\text{card}(E)$ est le nombre d'éléments dans E.

1) Montrer que μ est une mesure.

Soit $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ une fonction positive.

2) Montrer que f est nécessairement une fonction mesurable.

3) Montrer que
$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$
Pour ce faire, vous démontrerez d'abord le résultat lorsque $f = \mathbb{I}_A$ où $A \subset \mathbb{N}$ puis pour une fonction étagée positive et enfin pour une fonction mesurable positive. On rappelle deux résultats sur les séries de termes positifs :
i) pour une série double de termes positifs, on peut inverser les deux signes

somme.
ii) Soit la double suite $(u_{n,i},\ (n,i) \in \mathbb{N}^2)$. Si $u_{n,i} \geq 0$ pour tout $(n,i) \in \mathbb{N}^2$ et si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{n,i}$ est une suite croissante qui converge vers u_i lorsque $n \to \infty$ alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} u_{n,i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i.$$

Exercice [A-E22] – Démontrer les propriétés suivantes :

1) Si μ est une mesure définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et si (A_n), $n \in \mathbb{N}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

2) Si μ est une mesure bornée définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et si (A_n), $n \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{E}$ alors,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Exercice [A-E23] – Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mu)$ où $\mathcal{E} = \sigma(\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\})$ et où la mesure μ est définie par $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $\mu(A) = 1$ si A^{C} est au plus dénombrable.

1) Décrire les éléments de $\mathcal{E}$. Donner un exemple d'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que $E \notin \mathcal{E}$.

2) Montrer que μ est une probabilité.

Exercice [A-E24] – Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et soit $A \in \mathcal{E}$.

1) En notant $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice sur A, calculer

$$\int_A d\mu := \int_E \mathbb{I}_A d\mu.$$

2) Après avoir rappelé la définition d'une fonction étagée positive, calculer

$$\int_A f d\mu := \int_E f \mathbb{I}_A d\mu,$$

où f est une fonction étagée positive.

Exercice [A-E25] – Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [0, 1/3] \\ 1/4 & \text{si } x \in]1/3, 1]. \end{cases}$$

1) On munit les ensembles $[0,1]$ de la tribu $\sigma([0,1/3])$. Décrire cette tribu.

2) La fonction f est-elle mesurable ?

3) Reprendre les questions a) et b) avec la tribu $\sigma([0,1/3[)$.

Exercice [A-E26] – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de $(E,\mathcal{E},\mu)\mapsto([0,\infty[,\mathcal{B}([0,\infty[))$. On suppose que $f_n\to f$ μ-pp et que $\int_E f_0 d\mu<\infty$. Montrer que

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Vous ferez deux démonstrations différentes : une en utilisant le théorème de convergence monotone, l'autre en utilisant le théorème de convergence dominée.

Exercice [A-E27] – Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré et soit $B\notin\mathcal{E}$. On suppose que $\mu(E)<\infty$ et on introduit la fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : & (E,\mathcal{E}) & \mapsto & (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & & x & \to & \mathbb{I}_B(x)-\mathbb{I}_{B^{\complement}}(x) \end{array}$$

1) Calculer $\int_E |f| d\mu$.

2) La fonction f est-elle intégrable ?

Exercice [A-E28] – Soit $f\ :\mathbb{R}\mapsto]0,\infty[$ une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = c\in]0,\infty[$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^a\right]dx=\begin{cases}\infty & \text{si } 0<a<1,\\ c & \text{si } a=1,\\ 0 & \text{si } a>1.\end{cases}$$

Exercice [A-E29] – On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda^2)$. Soit $D_1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\leq 1\}$. Calculer la double intégrale

$$\int\int_{D_1}(1+xy)dxdy.$$

Exercice [A-E30] – Soit $f:(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x-y$. On pose

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1] \text{ et } 0\leq y\leq x\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1) Montrer que f est mesurable

2) Tracer l'ensemble D.

3) Montrer que la fonction $f\mathbb{I}_D$ est intégrable.

4) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\mathbb{I}_D d\lambda = \int_D f d\lambda = \int_D (x-y)dxdy,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice [A-E31] – Soit $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \ln(2 + y - x)$. On pose

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ et } x + y < 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1) Tracer l'ensemble D.

2) Montrer que la fonction $f\mathbb{I}_D$ est intégrable.

4) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\mathbb{I}_D d\lambda = \int_D f d\lambda = \int_D \ln(2 + y - x)dxdy,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, vous pourrez effectuer un changement de variable en posant $(u, v) = \varphi(x, y) = (x, 2 + y - x)$.
Aide : Pour tout $0 < a < b$,

$$\int_a^b x\ln(x)dx = \frac{a^2 - b^2}{4} + \frac{b^2\ln(b) - a^2\ln(a)}{2}.$$

B – Lois dicrètes, à densité et lois de mélange

Exercice [B-E1] – On considère l'expérience consistant à lancer de manière indépendante une même pièce de monnaie. On note p la probabilité d'obtenir face.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience. L'expression de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ n'est pas demandée.

2) Expliquer brièvement pourquoi la probabilité d'obtenir n fois pile est de $(1-p)^n$. Calculer la probabilité d'obtenir le premier face au deuxième lancer.

On pose $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face. Par convention, si à l'issue des n lancers on n'a pas réussi à obtenir face, la fonction X prendra la valeur $n + 1$.

3) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles pour la variable aléatoire X ?

4) Quelle est la loi $\mathbb{P}_X$ de X ?

5) Calculer l'espérance de X. On rappelle les résultats suivants : pour $r > 0$ et $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} i r^{i-1} = \frac{1 + m r^{m+1} - (m+1) r^m}{(1-r)^2}$$

Exercice [B-E2] – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_c(x) = c \cos(x) \mathbb{I}_{[0,\pi/2]}(x).$$

1) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que f soit une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue). Dans toute la suite cette valeur sera notée c_0. Vous pourrez donner l'ensemble des résultats en fonction de c_0.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ qui est à densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de densité f_{c_0}.

2) Calculer l'espérance de X.

3) Utiliser deux méthodes différentes pour calculer la densité de la variable aléatoire X^2.

Exercice [B-E3] – Soit X une variable aléatoire réelle positive définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(t)) dt,$$

où F est la fonction de répartition associée à X.

Exercice [B-E4] –

1) Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

   i) Montrer que F est une fonction de répartition (c'est à dire une fonction positive, croissante, continue à droite de limite nulle en $-\infty$ et égale à un en $+\infty$).

   ii) Cette fonction de répartition est-elle associée à une densité ? Si oui la calculer.

2) Mêmes questions avec la fonction G donnée par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \in [0, 1/3[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/3. \end{cases}$$

3) A l'aide de l'exercice B-E3, calculer les espérances associées aux fonctions de répartition F et G.

Exercice [B-E5] – On munit l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de la mesure μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{40}\sum_{i=1}^{4} i\delta_i + \frac{3}{8}\int_A \exp(-x/2)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)dx.$$

1) Montrer que μ est une mesure de probabilité (on admettra que μ est une mesure).

2) Ecrire μ sous la forme d'une loi de mélange ($\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ où $\alpha \in]0,1[$, μ_1 est une loi discrète et μ_2 une loi à densité).

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

3) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

4) Calculer l'espérance de X :

   i) Par calcul direct,

   ii) en utilisant la formule

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F(t))dt.$$

Exercice [B-E6] – On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda|t|)/2 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda|t|)/2 & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$.

1) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée f. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Soit μ une mesure sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu(]-\infty, x]) = F(x).$$

2) La mesure μ admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ? Vérifier que μ est une mesure de probabilité (vous ne redémontrerez pas que μ est une mesure).

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi μ.

3) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.

4) Calculer $\mathbb{E}(\exp(X))$ dans les trois cas suivants :
a) $\lambda > 1$, b) $\lambda < 1$ et c) $\lambda = 1$.
Pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire $\exp(X)$ est-elle intégrable ?

Exercice [B-E7] – On munit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de la mesure

$$\mu_c = \frac{c}{2}\left(\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \delta_1\right) + \frac{1}{2}\nu,$$

où $c > 0$ et ν est la mesure définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\nu(A) = \int_A \exp(-2x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)dx.$$

1) Quelle valeur doit-on prendre pour c pour que μ_c soit une mesure de probabilité (on ne redémontrera pas que μ_c est une mesure). Cette valeur de c sera notée c_0 dans la suite.

On considère une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi μ_{c_0}.

2) Montrer que μ_{c_0} est une loi de mélange. Vous donnerez la valeur de $\alpha \in]0,1[$, la loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la loi à densité $\mathbb{P}_X^{(2)}$ telles que $\mu_{c_0} = \alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$.

3) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

4) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois respectives $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et $\mathbb{P}_X^{(2)}$. Calculer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice [B-E8] – On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ (t + 1 - \exp(-\lfloor t \rfloor))/3 & \text{si } t \in [0, 2[, \\ 1 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq t\}$.

1) Tracer la fonction F et vérifier que c'est une fonction de répartition.

2) Proposer une valeur de $\alpha \in]0,1[$, une loi discrète μ_1 et une loi à densité μ_2 telles que $F(t) = \mu(]-\infty, t])$ avec $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

On considère une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi μ.

3) Calculer de deux façons différentes l'espérance de X.

Exercice [B-E9] – On considère la fonction de répartition définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/2, 3/4[, \\ x & \text{si } x \in [3/4, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que F est une fonction de répartition associée à une loi de mélange que vous préciserez. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de fonction de répartition F.

Exercice [B-E10] – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction $F_n(\cdot)$ avec $F_n(t) = 0$ pour $t < 0$ et, pour $t \geq 0$,

$$F_n(t) = \sum_{i=0}^{n} p_{i,n} \mathbb{I}_{[i,\infty[}(t) + \frac{2(1 - \exp(-t))}{3},$$

avec, pour $i = 1, \ldots, n$, $p_{i,n} = 2^{-n} C_n^i / 3$.

1) Représenter la fonction $F_2(\cdot)$. Est-ce une fonction de répartition ?

On admettra dans la suite que $F_n(\cdot)$ est une fonction de répartition pour tout $n > 2$. On introduit la variable aléatoire $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_{X_n}$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_{X_n}(] - \infty, t]) = F_n(t)$.

2) Montrer que $\mathbb{P}_{X_n} = \alpha \mathbb{P}_{X_n}^{(1)} + (1 - \alpha) \mathbb{P}_{X_n}^{(2)}$ en précisant la valeur de $\alpha \in]0, 1[$, la loi $\mathbb{P}_{X_n}^{(1)}$ (qui est une loi discrète) et la loi $\mathbb{P}_{X_n}^{(2)}$ (qui est une loi à densité). (Astuce : pour calculer la somme des $p_{i,n}$ penser à utiliser la formule du binôme de Newton).

3) Calculer l'espérance de X_2 (*i.e.* pour $n = 2$).

Exercice [B-E11] – (Loi de Pareto) Soient c et γ deux réels strictement positifs.

1) Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{c^{1/\gamma}}{\gamma} x^{-1/\gamma - 1} \mathbb{I}\{x \geq c\},$$

est une densité d'une variable aléatoire X sur $[c, \infty[$.

2) Montrer que X admet un moment d'ordre r pour $r < 1/\gamma$. Calculer l'espérance et la variance de X lorsque cela est possible.

Exercice [B-E12] – On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (*i.e.* ν_1 et ν_2 sont des mesures telles que $\nu_1(\mathbb{R}) = \nu_2(\mathbb{R}) = 1$) et soit $\alpha \in]0, 1[$. On définit la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto [0, \infty]$ par $\mu = \alpha \nu_1 + (1 - \alpha) \nu_2$.

1) Montrer que μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2) On prend $\alpha = 1/2$ et on suppose à présent que ν_1 admet une densité $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue définie par $f(x) = cx \mathbb{I}_{\{x \in [0,1]\}}$ et que $\nu_2 = \frac{1}{9} \delta_{1/3} + \frac{8}{9} \delta_{2/3}$.

a) Donner la valeur de c pour que ν_1 soit bien une mesure de probabilité.

b) Soit $F : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ la fonction de répartition associée à la mesure μ (*i.e.* $F(t) = \mu(]-\infty, t])$). Donner l'expression de $F(t)$ pour $t \in [0, 1/3[$. Calculer les valeurs $F(1/3)$ et $F(2/3)$.

c) Tracer la fonction de répartition $F(.)$.

d) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$. Calculer de deux façons différentes l'espérance de X.

C – Espérance conditionnelle

Exercice [C-E1] – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$. Les lois des variables aléatoires X et Y sont notées respectivement $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$. On rappelle que la tribu produit $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ est engendrée par l'ensemble $\mathcal{C} = \{\{k\} \times A,\ k \in \mathbb{N} \text{ et } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\}$ et que la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les éléments de $\mathcal{C}$. Dans cet exercice, on supposera que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(\{k\} \times A) = \mathbb{P}(X = k; Y \in A) = \int_A \frac{y^k}{k!} \exp(-2y) dy.$$

1) Vérifier que $\mathbb{P}_{(X,Y)}(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+) = 1$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = 2^{-(k+1)}$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty y^n \exp(-y) dy = n!$$

Sous quel nom connait-on la loi de la variable aléatoire $X + 1$?

Dans la suite de l'exercice, $h : (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ sera une fonction mesurable positive.

3) Donner l'expression de $\mathbb{E}(h(Y)|X)$.

4) Le but de cette question est de montrer que

$$\int_{\{X=k\}} h(Y) d\mathbb{P} = \int_0^\infty h(y) \frac{y^k}{k!} \exp(-2y) dy$$

i) Montrer que l'égalité ci-dessus est vraie pour $h = \mathbb{I}_A$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

ii) En déduire que l'égalité reste vraie pour toutes fonctions étagées positives.

iii) Montrer enfin l'égalité pour une fonction h mesurable et positive quelconque.

5) En utilisant les questions 2), 3) et 4), montrer que $\mathbb{E}(h(Y)|X) = \Phi(X)$ où $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ est la fonction mesurable définie pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$\Phi(x) = 2\int_0^\infty h(y)\frac{(2y)^x}{x!}\exp(-2y)dy.$$

En déduire que $\mathbb{E}(Y|X) = (X+1)/2$.

6) En utilisant le résultat de la question 5), montrer que

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_0^\infty h(y)\exp(-y)dy.$$

7) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Exercice [C-E2] – Soient $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ et $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ deux variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p_1 \in]0,1[$ pour X et $p_2 \in]0,1[$ pour Y. On introduit également la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Z ? Donner la loi de Z.

2) Démontrer que $X\mathbb{I}_{\{Z=1\}} = \mathbb{I}_{\{X=1\}\cap\{Y=0\}}$ (presque-sûrement).

3) En s'inspirant de l'égalité donnée dans la question 2), montrer que

$$\mathbb{E}(X|Z) = \alpha_1\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + \alpha_2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z).$$

Vous donnerez les valeurs de α_1 et α_2 en fonction de p_1 et p_2.

4) Vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X) = p_1$.

5) Montrer que $\mathbb{E}(Y|Z) = (1-\alpha_1)\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + (2-\alpha_2)\mathbb{I}_{\{2\}}(Z)$. (Astuce : montrer tout d'abord que $\mathbb{E}(X|Z) + \mathbb{E}(Y|Z) = Z$).

6) Donner en fonction de α_1 et α_2 les valeurs de β_1 et β_2 telles que

$$\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{E}(Y|Z) = \beta_1\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + \beta_2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z).$$

7) Donner en fonction de p_1 et p_2 la valeur de $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{E}(Y|Z)]$.

8) Les variables aléatoires $\mathbb{E}(X|Z)$ et $\mathbb{E}(Y|Z)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice [C-E3] – – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\frac{\exp(-y^2/2)}{1+y}\exp\left(-\frac{x}{1+y}\right)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(y).$$

où $c > 0$. On note f_Y la densité de Y.

1) Donner l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de c.

2) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité ? On rappelle que pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}.$$

3) Donner la fonction $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$.

Exercice [C-E4] – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{c}{x}\mathbb{I}_\Delta(x,y).$$

où $c > 0$ et $\Delta = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq t \leq s \leq 1\}$.

1) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité ?

2) Calculer les densités f_X et f_Y des variables aléatoires X et Y. Quel nom donne t'on à la loi de X ?

3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. Pour le calcul de $\mathbb{E}(Y)$, effectuer le changement de variable $z = -\ln(y)$.

4) Donner la fonction $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(Y|X) = h(X)$.

5) Donner la fonction $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$.

Exercice [C-E5] – On se place sur l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité définie pour tout $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ par

$$\mathbb{P}(]a,b[) := \int_a^b \frac{1}{x^2}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx.$$

On définit l'application $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donnée par $X(\omega) = \lfloor w \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure de x.

1) Montrer que X est une variable aléatoire.

2) Donner la loi de X, c'est-à-dire la mesure image de $\mathbb{P}$ par l'application X.

3) On introduit la sous tribu $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{C} = \{[n, n+1[,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer de deux façons différentes que $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X$ presque-sûrement.

Exercice [C-E6] – Soit (X,Y) un vecteur aléatoire réel de densité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) := \frac{\alpha\beta}{y}\exp\left(-\frac{\alpha x}{y} - \beta y\right)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(y),$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donner la fonction $g(\cdot)$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice [C-E7] – Soit (U_1, U_2) un couple de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$. Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exercice [C-E8] – On suppose que l'on a autant de chance d'avoir un garçon ou une fille à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette situation. On notera par exemple (F, G) l'élément de Ω : "L'ainée est une fille et le second est un garçon".

2) On note $\mathcal{B}_1$ la tribu engendrée par la partition de Ω : $\{(F,F)\}$, $\{(G,G)\}$, $\{(F,G),(G,F)\}$. A t'on $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$?

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles. Donner la loi et l'espérance de X.

4) Montrer que X est $\mathcal{B}_1$-mesurable. A quoi est égale la variable aléatoire $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$?

5) On note $\mathcal{B}_2$ la tribu engendrée par la partition de Ω : $\{(F,F)\}$, $\{(F,G)\}$, $\{(G,G),(G,F)\}$. Montrer que X n'est pas $\mathcal{B}_2$-mesurable.

6) Donner la loi de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)$ et vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)) = \mathbb{E}(X)$.

Exercice [C-E9] – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\, X_1^{-1}(\{k\}) \big|\, Y)$.

D – Convergence d'une suite de variables aléatoires

Exercice [D-E1] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que pour tout $n \geq 1$, X_n admet un moment d'ordre 2. On suppose en outre qu'il existe un réel μ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0.$$

1) Montrer que $\mathbb{E}\left((X_n - \mu)^2\right) = \mathrm{Var}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n) - \mu)^2$.

2) En déduire, en utilisant l'inégalité de Markov, que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers μ.

Exercice [D-E2] – Soient $n \geq 1$ et $p \in]0,1[$. On lance n fois une pièce avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est égale à p. Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de piles obtenus et $Y_n = \exp(n^{-1}S_n)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

2) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers e^p.

Exercice [D-E3] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1) Déterminer la loi de Y_n et calculer son espérance et sa variance.

2) En déduire l'espérance et la variance de S_n.

3) Que peut-on dire sur la convergence en probabilité de S_n/n ?

Exercice [D-E4] – On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires où X_n suit une loi exponentielle de paramètre n. On pose $Y_n = \cos(\lfloor X_n \rfloor \pi)$ (où $\lfloor x \rfloor = \sup\{y \in \mathbb{N};\ y \leq x\}$).

1) Déterminer la loi de Y_n.

2) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice [D-E5] – Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $m_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.

1) Montrer que m_n est une variable aléatoire admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Donner cette densité et calculer l'espérance et la variance de m_n.

2) Etudier la convergence en probabilité de m_n.

Exercice [D-E6] – Soit l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P}_U)$ où $\mathbb{P}_U$ est la probabilité uniforme sur $[0,1]$. On pose pour $\omega \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que X_n converge presque sûrement vers zéro.

Exercice [D-E7] – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements indépendants. On pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $X_n = \mathbb{I}_{A_n}$.

1) Si $p_n \to 0$, montrer que X_n converge en probabilité vers zéro.

2) Si $\sum p_n = \infty$, montrer que X_n ne converge pas presque sûrement vers 0.

3) En déduire que la convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre.

Exercice [D-E8] – Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,2]$. On pose $m_n := \min(U_1,\ldots,U_n)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de m_n et donner sa moyenne.

2) Etudier la convergence presque sûre de m_n.

Exercice [D-E9] –

1) Montrer que X_n converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q}\cap]0,\infty[$,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}\right) = 0.$$

2) En déduire que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Exercice [D-E10] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où X_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_n = k/n) = 1/(n+1)$ pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$. Montrer que X_n converge en loi vers X où X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice [D-E11] – Soit X_n une variable aléatoire de densité

$$f_n(x) = \begin{cases} 1-\cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f_n est une densité.

2) Expliquer brièvement pourquoi, pour tout $x \in]0,1[$, $f_n(x)$ n'a pas de limite.

3) Montrer que X_n converge en loi vers X où X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice [D-E12] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p_n avec $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que X_n converge vers une loi de Poisson de paramètre λ. En pratique cette approximation est valable si $n > 50$ et $np < 5$.

Exercice [D-E13] –

1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Donner la loi de $T := -\log(X)$.

2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que

$$\max(X_1,\ldots,X_n) - \log(n) \xrightarrow{d} T.$$

Exercice [D-E14] – Soit $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note F la fonction de répartition de X_1. On suppose qu'il existe $-\infty < a < b < \infty$ tels que $F(t) = 0$ pour tout $t < a$, $F(t) \in]0,1[$ pour tout $t \in [a, b[$ et $F(t) = 1$ si $t \geq b$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$ et $m_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$.

1) Donner l'expression des fonctions de répartition des variables aléatoires M_k et m_k en fonction de F.
2) Pour tout $\varepsilon > 0$ calculer les probabilités $\mathbb{P}(|M_k - b| \geq \varepsilon)$ et $\mathbb{P}(|m_k - a| > \varepsilon)$.
3) Montrer que la variable aléatoire $C_k = (M_k + m_k)/2$ converge en probabilité (lorsque $k \to \infty$) vers une constante c que vous préciserez.
4) Rappeler les énoncés du Lemme de Borel-Cantelli et de son corollaire.
5) Montrer que C_k converge presque-sûrement vers c lorsque $k \to \infty$.

Exercice [D-E15] – Soit $(X_n),\ n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_n.
2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) = \frac{1}{n^2} \mathbb{I}_{]0,n^2[}(\varepsilon).$$
3) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} -1$.
4) Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} -1$.

Exercice [D-E16] – Soit $(X_n),\ n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-t\theta_n) & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$
où (θ_n), $n \geq 1$ est une suite de réels avec $\theta_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

1) Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ lorsque $n \to \infty$.
2) Si $\theta_n = n$, montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour tout le reste de l'exercice, on prend $\theta_n = \ln(n)$ et on suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes.

3) Montrer que
$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > 1/2) = +\infty.$$

4) Montrer que
$$\mathbb{P}(\{X_n \to 0\}) \leq \mathbb{P}\left(\underline{\lim}\ \{|X_n| \leq 1/2\}\right).$$

5) En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli, en déduire que $\mathbb{P}(\{X_n \to 0\}) = 0$.

Exercice [D-E17] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire $Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_n X_{n+1}$.

1) Déterminer la loi de Y_n. Calculer son espérance et sa variance.

On pose dans la suite $Z_n = n^{-1}(Y_1 + \ldots + Y_n)$.

2) Calculer l'espérance de Z_n.

3) Pour $1 \leq i \leq j \leq n$, calculer la covariance entre Y_i et Y_j.

4) Calculer la variance de Z_n.

5) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vérifie t'elle la loi des grands nombres ?

Exercice [D-E18] – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}_{X_n} = (1-\delta_n)\mathbb{P}_1 + \delta_n \mathbb{P}_2$ où $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont des mesures de probablités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\delta_n \in [0,1]$.

1) On suppose que $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont des lois uniformes sur $[0,1]$ (*i.e.* $\mathbb{P}_1([0,t]) = \mathbb{P}_2([0,t]) = t$ pour tout $t \in [0,1]$). Donner la loi de X_n.

2) On suppose à présent que $\mathbb{P}_1$ est une loi uniforme sur $[0,1]$ et $\mathbb{P}_2$ une loi uniforme sur $[1,2]$.

   a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X_n.

   b) Montrer que si δ_n converge vers 0, X_n ne converge pas en probabilité vers $1/2$.

Exercice [D-E19] – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_{X_n}$ définie pour tout $t > 0$ par $\mathbb{P}_{X_n}(]-\infty, t]) = [t/(1+t)]^n$.

1) Montrer (sans utiliser la question suivante) que $1/X_n$ converge en probabilité vers 0.

2) Montrer que $1/X_n$ converge presque-sûrement vers 0.

3) Etudier la convergence en loi de X_n/n.

Exercice [D-E20] – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1. Pour $n \geq 2$, on pose
$$Z_n := \max(X_1, \ldots, X_n)/\ln(n).$$

1) Calculer la fonction de répartition de Z_n.

2) Montrer que Z_n converge en probabilité vers 1.

Exercice [D-E21] – Soit X_1 une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_1. Pour $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire X_n admettant F_n pour fonction de répartition où, pour $x \geq 0$, $F_n(x) = F_1(nx)$. Les variables aléatoires X_1 et X_n, $n \geq 1$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Montrer que X_n converge en probabilité vers zéro.

On admet que si Y est une variable aléatoire positive et intégrable alors

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n) < \infty.$$

2) Montrer que si X_1 est intégrable alors X_n converge presque-sûrement vers zéro.

Exercice [D-E22] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où la loi de X_n est donnée par

$$\mathbb{P}(X_n = 1 + 1/n) = \frac{n+2}{2n} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 2 + 1/n) = \frac{n-2}{2n}.$$

On considère une variable aléatoire X, indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 2}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$.

1) Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$.

2) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire $X_n - X$? Donner sa loi.

3) Montrer que X_n ne converge pas en moyenne vers X et que X_n ne converge pas en probabilité vers X.

4) Montrer que X_n converge en loi vers X.

Exercice [D-E23] – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1) Calculer l'espérance de X_1.

2) Montrer que $S_n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} p$.

3) Quelle est la loi de S_n ?

4) Donner un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ tel que $\sigma(S_n) = \sigma(\mathcal{C})$.

5) Montrer que $X_1 = \mathbb{I}_{X_1=1}$ (presque sûrement).

6) Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\int_{S_n^{-1}(\{i\})} X_1 d\mathbb{P} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ C_{n-1}^{i-1} p^i (1-p)^{n-i} & \text{si } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

7) Donner la fonction $h : \{0, \dots, n\} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(X_1|S_n) = h(S_n)$.

8) Montrer que $\mathbb{E}(X_1|S_n)$ converge presque-sûrement vers une constante que vous préciserez.