Exercices pour le cours de

Probabilités 3

A – Espaces mesurés et fonctions mesurables

Exercice [A-E1] – On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On introduit l'ensemble $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Q}\}$.

1) Donner tous les éléments de la tribu $\mathcal{P}(E)$.

2) A-t-on $\mathbb{Q} \in E$? $\mathbb{Q} \subset E$? $1 \in E$? $\{\mathbb{Q}\} \in \mathcal{P}(E)$? $\mathbb{N} \subset \mathcal{P}(E)$?

Exercice [A-E2] – Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble.

1) Donner l'ensemble des éléments de la tribu $\mathcal{P}(E)$.

2) Parmi les écritures suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $a \in E$	b) $a \subset E$	c) $\{a\} \in E$	d) $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$
e) $\{a\} \subset E$	f) $\emptyset \in E$	g) $\emptyset \subset E$	h) $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(E)$

Exercice [A-E3] – Soit $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ $(n > 2)$ un ensemble.

1) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Rappeler la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.

2) On rappelle qu'un singleton est un ensemble formé d'un seul élément. Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de E ?

3) Quelle est la tribu engendrée par l'ensemble des parties de E contenant deux éléments ?

Exercice [A-E4] – Soit E un ensemble et soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux tribus de parties de E.

1) Montrer que $\mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ est également une tribu de parties de E.

2) Donner un exemple simple de tribus $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ pour lesquelles $\mathcal{E} \cup \mathcal{F}$ n'est pas une tribu de parties de E.

Exercice [A-E5] – Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ un ensemble de parties de E.

1) Donner les propriétés que doit vérifier l'ensemble $\mathcal{E}$ pour être une tribu de parties de E.

2) Quelles propriétés doit satisfaire la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ pour être une mesure ?

3) Soit $E = [0,1]$ et $\mathcal{E} = \{[0,1], \emptyset, [0,1/3], [1/3,1]\}$ un ensemble de parties de E. L'ensemble $\mathcal{E}$ est-il une tribu (justifier votre réponse) ?

Exercice [A-E6] – On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et on pose

$$\overline{\lim} A_n := \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k \text{ et } \underline{\lim} A_n := \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k$$

1) Montrer que $\overline{\lim} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\underline{\lim} A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\overline{\lim} A_n$ et $\underline{\lim} A_n$ pour la suite $A_n = [-1/n, 1]$.

3) Même question avec $A_n = [-1, 1 + (-1)^n/n]$.

Exercice [A-E7] – Soit l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. On pose $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{b\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}\}$.

1) Après avoir rappelé la définition d'une tribu engendrée, donner les tribus $\sigma(\mathcal{C}_1)$ et $\sigma(\mathcal{C}_2)$.

2) A-t-on $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$? $\sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$?

Exercice [A-E8] – On se place sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ où λ est la mesure de Lebesgue. Pour $-\infty < a < b < \infty$, on pose

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [a + 1/n, b - 1/n] \text{ et } B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [a - 1/n, b + 1/n].$$

1) Expliquer pourquoi A et B sont des éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Calculer $\lambda(A)$ et $\lambda(B)$. Justifier correctement la méthode utilisée.

Exercice [A-E9] – Un sac contient 6 boules : 3 boules rouges notées R_1, R_2 et R_3, 2 boules bleues notées B_1 et B_2 et une boule noire N. On tire simultanément 3 boules du sac.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Pour un tirage donné, on compte les points de la façon suivante : la boule noire rapporte 1 point, une boule bleue 0 point et une boule rouge, -1 points. On introduit la variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui à chaque tirage ω associe le nombre total de points $X(\omega)$ obtenu (par exemple, pour un tirage ω d'une boule noire et deux boules rouges, $X(\omega) = 1 + (-1) + (-1) = -1$).

2) Quelles sont les valeurs possibles pour la fonction X ?

3) Quelle est la loi de X ?

Exercice [A-E10] – Un sac contient trois boules numérotées de 1 à 3. Les deux premières boules sont rouges et la troisième noire. On tire une boule du sac. Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser cette expérience aléatoire. Ecrire l'évènement "obtenir une boule rouge".

Exercice [A-E11] – Un sac contient les 5 lettres A, C, E, N et R. Vous tirez du sac les lettres une à une et les placez devant vous en conservant l'ordre du tirage. Proposer un espace probabilisé permettant de décrire cette expérience et calculer la probabilité d'obtenir le mot CRANE ou le mot NACRE.

Exercice [A-E12] – On suppose que $n > 2$ personnes arrivent en même temps au guichet pour acheter des places de concert. Afin d'éviter toute bousculade, le responsable du guichet décide d'attribuer un numéro aléatoire aux n personnes : le numéro 1 prendra la première place dans la file et ainsi de suite.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience.

Parmi les n personnes, se trouve deux amis d'enfance.

2) Calculer la probabilité qu'ils soient distants de $r \in \{1, \ldots, n-1\}$ places (*i.e.* qu'il y ait exactement $r-1$ personnes entre eux) ?

3) Quelle est la distance la plus probable ? la moins probable ?

Exercice [A-E13] – L'ordinateur d'une banque envoie chaque mois un relevé de compte aux n clients de la banque. Une erreur de programmation fait mélanger aléatoirement les relevés de compte et les enveloppes portant l'adresse du client. Proposer un espace probabilisable permettant de modéliser ce phénomène.

Exercice [A-E14] – Une urne contient quatre boules rouges, trois boules noires ainsi qu'une boule blanche. Les boules sont de plus numérotées. On tire en une seule fois trois boules.

1) Proposer un espace probabilisable permettant la description de cette situation.

2) Proposer une mesure de probabilité sur l'espace probabilisable de la question 1). Calculer les probabilités des évènements suivants : $A =$ "on obtient au moins deux boules rouges" et $B =$ "on obtient deux boules de même couleur au moins".

Exercice [A-E15] – On tire simultanément n boules dans une urne contenant $N \geq n$ boules numérotées. Parmi ces N boules, il y a m boules rouges les autres étant noires.

1) Définir un espace probabilisé permettant de modéliser cette expérience.

2) On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de X.

Exercice [A-E16] – On suppose que la proportion de tricheurs au jeu du pile ou face est de 1%. Vous jouez à ce jeu avec une personne qui parie pile et obtient pile. Modéliser cette expérience en utilisant un espace produit et calculer la probabilité que la personne ait triché au jeu.

Exercice [A-E17] – Un sac contient 3 boules rouges R_1, R_2 et R_3 et deux boules noires N_1 et N_2. On tire en une seule fois deux boules du sac.

1) Calculer le cardinal de l'espace Ω des réalisations possibles et donner toutes les réalisations possibles (un élément de Ω sera, par exemple, $\omega = (R_2, N_1)$).

2) Comme tribu associée à Ω, on prend la tribu $\mathcal{F}$ engendrée par l'évènement $E = \{(N_1, N_2)\}$. Expliciter cette tribu $\mathcal{F}$.

3) Sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$, on définit la fonction $X : \Omega \mapsto \{0, 1, 2\}$ qui à tout élément de Ω associe le nombre de boules rouges. Cette fonction est-elle une variable aléatoire ? (justifier votre réponse).

4) Quelle est la plus petite tribu $\mathcal{G}$ qui rend X mesurable ?

Exercice [A-E18] – Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$ la partie entière de x. On introduit la fonction $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$.

1) Donner un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \sigma(\mathcal{C})$.

2) Donner l'ensemble $f^{-1}(\{1\})$.

3) Après avoir rappelé la définition d'une fonction mesurable, montrer que f est mesurable.

4) Montrer que la fonction f peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \mathbb{I}_{A_n}.$$

Vous préciserez la suite A_n, $n \in \mathbb{N}$.

5) Montrer que $g := f\mathbb{I}_{]-4,4[}$ est une fonction étagée positive.

On munit l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de la mesure de Lebesgue λ.

6) Après avoir rappelé la définition de la mesure de Lebesgue, donner la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g d\lambda$.

Exercice [A-E19] – On considère la suite de fonction $f_n : E :=]0, 1] \times]0, 1] \to \mathbb{R}$ avec pour tout $n \geq 1$ et $(x, y) \in E$,

$$f_n(x, y) := \sum_{i=1}^{3^n} \left(2 + \frac{1}{i}\right) \mathbb{I}_{A_{n,i}}(x, y),$$

où $A_{n,i}$ est le pavé

$$A_{n,i} := \left]\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right] \times \left]\frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n}\right].$$

1) Montrer que f_n, $n \geq 1$ est une suite de fonctions étagées positives (on munit les ensembles de départ et d'arrivée des tribus $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ respectivement).

2) Calculer l'intégrale de f_n par rapport à la mesure de Lebesgue λ sur $\mathcal{B}(E)$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\lambda = 0.$$

Exercice [A-E20] – Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et soit $f : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

1) Rappeler la définition d'une fonction mesurable. Que suffit-il de vérifier pour montrer que f est mesurable ?

Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f_t : (E, \mathcal{E}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $x \in E$,

$$f_t(x) = \begin{cases} -t & \text{si } f(x) < -t, \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq t, \\ t & \text{si } f(x) > t. \end{cases}$$

2) Ecrire l'ensemble $f_t^{-1}([0, 2t])$ sous la forme $f^{-1}(A)$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

3) Donner l'ensemble $f_t^{-1}([-2t, 2t])$.

4) Montrer que f_t est mesurable.

Exercice [A-E21] – On considère la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$ définie pour tout $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ par $\mu(E) = \mathrm{card}(E)$ où $\mathrm{card}(E)$ est le nombre d'éléments dans E.

1) Montrer que μ est une mesure.

Soit $f : (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ une fonction positive.

2) Montrer que f est nécessairement une fonction mesurable.

3) Montrer que
$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n).$$

Pour ce faire, vous démontrerez d'abord le résultat lorsque $f = \mathbb{I}_A$ où $A \subset \mathbb{N}$ puis pour une fonction étagée positive et enfin pour une fonction mesurable positive. On rappelle deux résultats sur les séries de termes positifs :
i) pour une série double de termes positifs, on peut inverser les deux signes

somme.
ii) Soit la double suite $(u_{n,i},\ (n,i) \in \mathbb{N}^2)$. Si $u_{n,i} \geq 0$ pour tout $(n,i) \in \mathbb{N}^2$ et si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $u_{n,i}$ est une suite croissante qui converge vers u_i lorsque $n \to \infty$ alors
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i\in\mathbb{N}} u_{n,i} = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i.$$

Exercice [A-E22] – Démontrer les propriétés suivantes :

1) Si μ est une mesure définie sur l'espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ et si (A_n), $n \in \mathbb{N}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{E}$ alors,
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

2) Si μ est une mesure bornée définie sur l'espace mesurable $(E,\mathcal{E})$ et si (A_n), $n \in \mathbb{N}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{E}$ alors,
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Exercice [A-E23] – Soit l'espace mesuré $(\mathbb{R},\mathcal{E},\mu)$ où $\mathcal{E} = \sigma(\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\})$ et où la mesure μ est définie par $\mu(A) = 0$ si A est au plus dénombrable et $\mu(A) = 1$ si A^{C} est au plus dénombrable.

1) Décrire les éléments de $\mathcal{E}$. Donner un exemple d'ensemble $E \subset \mathbb{R}$ tel que $E \notin \mathcal{E}$.

2) Montrer que μ est une probabilité.

Exercice [A-E24] – Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré et soit $A \in \mathcal{E}$.

1) En notant $\mathbb{I}_A$ la fonction indicatrice sur A, calculer
$$\int_A d\mu := \int_E \mathbb{I}_A d\mu.$$

2) Après avoir rappelé la définition d'une fonction étagée positive, calculer
$$\int_A f d\mu := \int_E f\mathbb{I}_A d\mu,$$
où f est une fonction étagée positive.

Exercice [A-E25] – Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ la fonction définie par :
$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x \in [0,1/3] \\ 1/4 & \text{si } x \in]1/3,1]. \end{cases}$$

1) On munit les ensembles $[0,1]$ de la tribu $\sigma([0,1/3])$. Décrire cette tribu.

2) La fonction f est-elle mesurable ?

3) Reprendre les questions a) et b) avec la tribu $\sigma([0,1/3[)$.

Exercice [A-E26] – Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables de $(E,\mathcal{E},\mu)\mapsto([0,\infty[,\mathcal{B}([0,\infty[))$. On suppose que $f_n\to f$ μ-pp et que $\int_E f_0 d\mu<\infty$. Montrer que

$$\int_E f_n d\mu \to \int_E f d\mu.$$

Vous ferez deux démonstrations différentes : une en utilisant le théorème de convergence monotone, l'autre en utilisant le théorème de convergence dominée.

Exercice [A-E27] – Soit $(E,\mathcal{E},\mu)$ un espace mesuré et soit $B\notin\mathcal{E}$. On suppose que $\mu(E)<\infty$ et on introduit la fonction

$$\begin{array}{cccc} f & : & (E,\mathcal{E}) & \mapsto & (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ & & x & \to & \mathbb{I}_B(x)-\mathbb{I}_{B^{\complement}}(x) \end{array}$$

1) Calculer $\int_E |f|d\mu$.

2) La fonction f est-elle intégrable ?

Exercice [A-E28] – Soit $f\ :\mathbb{R}\mapsto]0,\infty[$ une fonction mesurable telle que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = c\in]0,\infty[$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} n\ln\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^a\right]dx=\begin{cases}\infty & \text{si } 0<a<1,\\ c & \text{si } a=1,\\ 0 & \text{si } a>1.\end{cases}$$

Exercice [A-E29] – On se place sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2),\lambda^2)$. Soit $D_1:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x^2+y^2\le 1\}$. Calculer la double intégrale

$$\int\int_{D_1}(1+xy)dxdy.$$

Exercice [A-E30] – Soit $f:(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=x-y$. On pose

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in[0,1] \text{ et } 0\le y\le x\}\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1) Montrer que f est mesurable

2) Tracer l'ensemble D.

3) Montrer que la fonction $f\mathbb{I}_D$ est intégrable.

4) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\mathbb{I}_D d\lambda = \int_D f d\lambda = \int_D (x-y)dxdy,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice [A-E31] – Soit $f : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ la fonction définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \ln(2 + y - x)$. On pose

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0 \text{ et } x + y < 1\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1) Tracer l'ensemble D.

2) Montrer que la fonction $f\mathbb{I}_D$ est intégrable.

4) Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\mathbb{I}_D d\lambda = \int_D f d\lambda = \int_D \ln(2 + y - x)dxdy,$$

où λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$. Pour ce faire, vous pourrez effectuer un changement de variable en posant $(u, v) = \varphi(x, y) = (x, 2 + y - x)$.
Aide : Pour tout $0 < a < b$,

$$\int_a^b x\ln(x)dx = \frac{a^2 - b^2}{4} + \frac{b^2\ln(b) - a^2\ln(a)}{2}.$$

B – Lois dicrètes, à densité et lois de mélange

Exercice [B-E1] – On considère l'expérience consistant à lancer de manière indépendante une même pièce de monnaie. On note p la probabilité d'obtenir face.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience. L'expression de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ n'est pas demandée.

2) Expliquer brièvement pourquoi la probabilité d'obtenir n fois pile est de $(1 - p)^n$. Calculer la probabilité d'obtenir le premier face au deuxième lancer.

On pose $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{P}(E))$ la variable aléatoire donnant le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier face. Par convention, si à l'issue des n lancers on n'a pas réussi à obtenir face, la fonction X prendra la valeur $n + 1$.

3) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles pour la variable aléatoire X ?

4) Quelle est la loi $\mathbb{P}_X$ de X ?

5) Calculer l'espérance de X. On rappelle les résultats suivants : pour $r > 0$ et $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{m} r^i = \frac{1 - r^{m+1}}{1 - r} \text{ et } \sum_{i=1}^{m} i r^{i-1} = \frac{1 + m r^{m+1} - (m+1) r^m}{(1 - r)^2}$$

Exercice [B-E2] – Pour tout $c \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_c(x) = c \cos(x) \mathbb{I}_{[0,\pi/2]}(x).$$

1) Quelle valeur de c faut-il prendre pour que f soit une densité (par rapport à la mesure de Lebesgue). Dans toute la suite cette valeur sera notée c_0. Vous pourrez donner l'ensemble des résultats en fonction de c_0.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X$ qui est à densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) de densité f_{c_0}.

2) Calculer l'espérance de X.

3) Utiliser deux méthodes différentes pour calculer la densité de la variable aléatoire X^2.

Exercice [B-E3] – Soit X une variable aléatoire réelle positive définie sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt,$$

où F est la fonction de répartition associée à X.

Exercice [B-E4] –

1) Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

   i) Montrer que F est une fonction de répartition (c'est à dire une fonction positive, croissante, continue à droite de limite nulle en $-\infty$ et égale à un en $+\infty$).

   ii) Cette fonction de répartition est-elle associée à une densité ? Si oui la calculer.

2) Mêmes questions avec la fonction G donnée par :

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2x & \text{si } x \in [0, 1/3[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1/3. \end{cases}$$

3) A l'aide de l'exercice B-E3, calculer les espérances associées aux fonctions de répartition F et G.

Exercice [B-E5] – On munit l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de la mesure μ définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\mu(A) = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{4} i\delta_i + \frac{3}{8} \int_A \exp(-x/2) \mathbb{I}_{[0,\infty[}(x) dx.$$

1) Montrer que μ est une mesure de probabilité (on admettra que μ est une mesure).

2) Ecrire μ sous la forme d'une loi de mélange ($\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ où $\alpha \in]0,1[$, μ_1 est une loi discrète et μ_2 une loi à densité).

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$.

3) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

4) Calculer l'espérance de X :

   i) Par calcul direct,

   ii) en utilisant la formule
$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(t)) dt.$$

Exercice [B-E6] – On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} \exp(-\lambda|t|)/2 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-\lambda|t|)/2 & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où $\lambda > 0$.

1) Montrer que F est dérivable et calculer sa dérivée f. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) dt.$$

Soit μ une mesure sur l'espace $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mu(]-\infty, x]) = F(x).$$

2) La mesure μ admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ? Vérifier que μ est une mesure de probabilité (vous ne redémontrerez pas que μ est une mesure).

Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi μ.

3) Calculer $\mathbb{E}(|X|)$. La variable aléatoire X est-elle intégrable ? Si oui, calculer $\mathbb{E}(X)$.

4) Calculer $\mathbb{E}(\exp(X))$ dans les trois cas suivants :
   a) $\lambda > 1$, b) $\lambda < 1$ et c) $\lambda = 1$.
   Pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire $\exp(X)$ est-elle intégrable ?

Exercice [B-E7] – On munit l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de la mesure

$$\mu_c = \frac{c}{2}\left(\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0 + \delta_1\right) + \frac{1}{2}\nu,$$

où $c > 0$ et ν est la mesure définie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par

$$\nu(A) = \int_A \exp(-2x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)dx.$$

1) Quelle valeur doit-on prendre pour c pour que μ_c soit une mesure de probabilité (on ne redémontrera pas que μ_c est une mesure). Cette valeur de c sera notée c_0 dans la suite.

On considère une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi μ_{c_0}.

2) Montrer que μ_{c_0} est une loi de mélange. Vous donnerez la valeur de $\alpha \in]0,1[$, la loi discrète $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et la loi à densité $\mathbb{P}_X^{(2)}$ telles que $\mu_{c_0} = \alpha\mathbb{P}_X^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_X^{(2)}$.

3) Donner l'expression de la fonction de répartition de X.

4) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois respectives $\mathbb{P}_X^{(1)}$ et $\mathbb{P}_X^{(2)}$. Calculer l'espérance de X_1 et de X_2. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice [B-E8] – On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ (t + 1 - \exp(-\lfloor t \rfloor))/3 & \text{si } t \in [0, 2[, \\ 1 & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

où pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z},\ k \leq t\}$.

1) Tracer la fonction F et vérifier que c'est une fonction de répartition.

2) Proposer une valeur de $\alpha \in]0,1[$, une loi discrète μ_1 et une loi à densité μ_2 telles que $F(t) = \mu(]-\infty, t])$ avec $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$.

On considère une variable aléatoire $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi μ.

3) Calculer de deux façons différentes l'espérance de X.

Exercice [B-E9] – On considère la fonction de répartition définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \ln(1+x) & \text{si } x \in [0, 1/2[, \\ 1/2 & \text{si } x \in [1/2, 3/4[, \\ x & \text{si } x \in [3/4, 1[, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que F est une fonction de répartition associée à une loi de mélange que vous préciserez. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire de fonction de répartition F.

Exercice [B-E10] – Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction $F_n(\cdot)$ avec $F_n(t) = 0$ pour $t < 0$ et, pour $t \geq 0$,

$$F_n(t) = \sum_{i=0}^{n} p_{i,n} \mathbb{I}_{[i,\infty[}(t) + \frac{2(1-\exp(-t))}{3},$$

avec, pour $i = 1, \ldots, n$, $p_{i,n} = 2^{-n} C_n^i / 3$.

1) Représenter la fonction $F_2(\cdot)$. Est-ce une fonction de répartition ?

On admettra dans la suite que $F_n(\cdot)$ est une fonction de répartition pour tout $n > 2$. On introduit la variable aléatoire $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_{X_n}$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}_{X_n}(]-\infty, t]) = F_n(t)$.

2) Montrer que $\mathbb{P}_{X_n} = \alpha \mathbb{P}_{X_n}^{(1)} + (1-\alpha)\mathbb{P}_{X_n}^{(2)}$ en précisant la valeur de $\alpha \in]0,1[$, la loi $\mathbb{P}_{X_n}^{(1)}$ (qui est une loi discrète) et la loi $\mathbb{P}_{X_n}^{(2)}$ (qui est une loi à densité). (Astuce : pour calculer la somme des $p_{i,n}$ penser à utiliser la formule du binôme de Newton).

3) Calculer l'espérance de X_2 (*i.e.* pour $n = 2$).

Exercice [B-E11] – (Loi de Pareto) Soient c et γ deux réels strictement positifs.

1) Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \frac{c^{1/\gamma}}{\gamma} x^{-1/\gamma - 1} \mathbb{I}\{x \geq c\},$$

est une densité d'une variable aléatoire X sur $[c, \infty[$.

2) Montrer que X admet un moment d'ordre r pour $r < 1/\gamma$. Calculer l'espérance et la variance de X lorsque cela est possible.

Exercice [B-E12] – On se place sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soient ν_1 et ν_2 deux mesures de probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (*i.e.* ν_1 et ν_2 sont des mesures telles que $\nu_1(\mathbb{R}) = \nu_2(\mathbb{R}) = 1$) et soit $\alpha \in]0,1[$. On définit la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto [0, \infty]$ par $\mu = \alpha\nu_1 + (1-\alpha)\nu_2$.

1) Montrer que μ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

2) On prend $\alpha = 1/2$ et on suppose à présent que ν_1 admet une densité $f : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue définie par $f(x) = cx\mathbb{I}_{\{x \in [0,1]\}}$ et que $\nu_2 = \frac{1}{9}\delta_{1/3} + \frac{8}{9}\delta_{2/3}$.

a) Donner la valeur de c pour que ν_1 soit bien une mesure de probabilité.

b) Soit $F : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ la fonction de répartition associée à la mesure μ (*i.e.* $F(t) = \mu(]-\infty, t])$). Donner l'expression de $F(t)$ pour $t \in [0, 1/3[$. Calculer les valeurs $F(1/3)$ et $F(2/3)$.

c) Tracer la fonction de répartition $F(.)$.

d) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On note $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une variable aléatoire de loi $\mathbb{P}_X = \mu$. Calculer de deux façons différentes l'espérance de X.