Exercices pour le cours de

Probabilités et intégration (S6)

C – Espérance conditionnelle

Exercice [C-E1] – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+, \mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$. Les lois des variables aléatoires X et Y sont notées respectivement $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$. On rappelle que la tribu produit $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$ est engendrée par l'ensemble $\mathcal{C} = \{\{k\} \times A,\ k \in \mathbb{N} \text{ et } A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\}$ et que la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est entièrement caractérisée par ses valeurs sur les éléments de $\mathcal{C}$. Dans cet exercice, on supposera que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(\{k\} \times A) = \mathbb{P}(X = k; Y \in A) = \int_A \frac{y^k}{k!} \exp(-2y) dy.$$

1) Vérifier que $\mathbb{P}_{(X,Y)}(\mathbb{N} \times \mathbb{R}^+) = 1$.

2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}(X = k) = 2^{-(k+1)}$. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^\infty y^n \exp(-y) dy = n!$$

Sous quel nom connait-on la loi de la variable aléatoire $X + 1$?

Dans la suite de l'exercice, $h : (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ sera une fonction mesurable positive.

3) Donner l'expression de $\mathbb{E}(h(Y)|X)$.

4) Le but de cette question est de montrer que

$$\int_{\{X=k\}} h(Y) d\mathbb{P} = \int_0^\infty h(y) \frac{y^k}{k!} \exp(-2y) dy$$

   i) Montrer que l'égalité ci-dessus est vraie pour $h = \mathbb{I}_A$ où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
   ii) En déduire que l'égalité reste vraie pour toutes fonctions étagées positives.
   iii) Montrer enfin l'égalité pour une fonction h mesurable et positive quelconque.

5) En utilisant les questions 2), 3) et 4), montrer que $\mathbb{E}(h(Y)|X) = \Phi(X)$ où $\Phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ est la fonction mesurable définie pour tout $x \in \mathbb{N}$ par

$$\Phi(x) = 2 \int_0^\infty h(y) \frac{(2y)^x}{x!} \exp(-2y) dy.$$

En déduire que $\mathbb{E}(Y|X) = (X + 1)/2$.

6) En utilisant le résultat de la question 5), montrer que

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \int_0^\infty h(y)\exp(-y)dy.$$

7) Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

Exercice [C-E2] – Soient $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ et $Y : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ deux variables aléatoires que l'on supposera indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p_1 \in]0,1[$ pour X et $p_2 \in]0,1[$ pour Y. On introduit également la variable aléatoire $Z = X + Y$.

1) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire Z ? Donner la loi de Z.

2) Démontrer que $X\mathbb{I}_{\{Z=1\}} = \mathbb{I}_{\{X=1\}\cap\{Y=0\}}$ (presque-sûrement).

3) En s'inspirant de l'égalité donnée dans la question 2), montrer que

$$\mathbb{E}(X|Z) = \alpha_1\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + \alpha_2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z).$$

Vous donnerez les valeurs de α_1 et α_2 en fonction de p_1 et p_2.

4) Vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)) = \mathbb{E}(X) = p_1$.

5) Montrer que $\mathbb{E}(Y|Z) = (1-\alpha_1)\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + (2-\alpha_2)\mathbb{I}_{\{2\}}(Z)$. (Astuce : montrer tout d'abord que $\mathbb{E}(X|Z) + \mathbb{E}(Y|Z) = Z$).

6) Donner en fonction de α_1 et α_2 les valeurs de β_1 et β_2 telles que

$$\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{E}(Y|Z) = \beta_1\mathbb{I}_{\{1\}}(Z) + \beta_2\mathbb{I}_{\{2\}}(Z).$$

7) Donner en fonction de p_1 et p_2 la valeur de $\mathbb{E}[\mathbb{E}(X|Z)\mathbb{E}(Y|Z)]$.

8) Les variables aléatoires $\mathbb{E}(X|Z)$ et $\mathbb{E}(Y|Z)$ sont-elles indépendantes ?

Exercice [C-E3] – – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = c\frac{\exp(-y^2/2)}{1+y}\exp\left(-\frac{x}{1+y}\right)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(x)\mathbb{I}_{[0,\infty[}(y).$$

où $c > 0$. On note f_Y la densité de Y.

1) Donner l'expression de $f_Y(y)$ en fonction de c.

2) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit bien une fonction de densité ? On rappelle que pour tout $\sigma > 0$,

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = \sigma\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}.$$

3) Donner la fonction $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = h(Y)$.

Exercice [C-E4] – Soit $(X,Y) : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ un vecteur aléatoire de loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ qui admet pour densité la fonction

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{c}{x}\mathbb{I}_{\Delta}(x,y).$$

où $c > 0$ et $\Delta = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq t \leq s \leq 1\}$.

1) Quelle valeur de $c > 0$ faut-il prendre pour que $f_{(X,Y)}$ soit une densité ?

2) Calculer les densités f_X et f_Y des variables aléatoires X et Y. Quel nom donne t'on à la loi de X ?

3) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. Pour le calcul de $\mathbb{E}(Y)$, effectuer le changement de variable $z = -\ln(y)$.

4) Donner la fonction $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(Y|X) = h(X)$.

5) Donner la fonction $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$.

Exercice [C-E5] – On se place sur l'espace probabilisé $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est la mesure de probabilité définie pour tout $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ par

$$\mathbb{P}(]a,b[) := \int_a^b \frac{1}{x^2}\mathbb{I}_{[1,\infty[}(x)dx.$$

On définit l'application $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ donnée par $X(\omega) = \lfloor w \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière inférieure de x.

1) Montrer que X est une variable aléatoire.

2) Donner la loi de X, c'est-à-dire la mesure image de $\mathbb{P}$ par l'application X.

3) On introduit la sous tribu $\mathcal{A}$ engendrée par $\mathcal{C} = \{[n, n+1[,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Montrer de deux façons différentes que $\mathbb{E}(X|\mathcal{A}) = X$ presque-sûrement.

Exercice [C-E6] – Soit (X,Y) un vecteur aléatoire réel de densité :

$$f_{(X,Y)}(x,y) := \frac{\alpha\beta}{y}\exp\left(-\frac{\alpha x}{y} - \beta y\right)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(x)\mathbb{I}_{]0,\infty[}(y),$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Donner la fonction $g(\cdot)$ telle que $\mathbb{E}(X|Y) = g(Y)$. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

Exercice [C-E7] – Soit (U_1, U_2) un couple de variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$. Donner l'expression de la variable aléatoire $\mathbb{E}(X|Y)$.

Exercice [C-E8] – On suppose que l'on a autant de chance d'avoir un garçon ou une fille à la naissance. Votre voisin de palier vous dit qu'il a deux enfants.

1) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette situation. On notera par exemple (F, G) l'élément de Ω : "L'ainée est une fille et le second est un garçon".

2) On note $\mathcal{B}_1$ la tribu engendrée par la partition de Ω : $\{(F, F)\}$, $\{(G, G)\}$, $\{(F, G), (G, F)\}$. A t'on $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$?

3) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles. Donner la loi et l'espérance de X.

4) Montrer que X est $\mathcal{B}_1$-mesurable. A quoi est égale la variable aléatoire $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)$?

5) On note $\mathcal{B}_2$ la tribu engendrée par la partition de Ω : $\{(F, F)\}$, $\{(F, G)\}$, $\{(G, G), (G, F)\}$. Montrer que X n'est pas $\mathcal{B}_2$-mesurable.

6) Donner la loi de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)$ et vérifier que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)) = \mathbb{E}(X)$.

Exercice [C-E9] – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose $Y = X_1 + \ldots + X_n$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(X_1^{-1}(\{k\}) \big| Y)$.

D – Convergence d'une suite de variables aléatoires

Exercice [D-E1] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que pour tout $n \geq 1$, X_n admet un moment d'ordre 2. On suppose en outre qu'il existe un réel μ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mu \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0.$$

1) Montrer que $\mathbb{E}\left((X_n - \mu)^2\right) = \mathrm{Var}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n) - \mu)^2$.

2) En déduire, en utilisant l'inégalité de Markov, que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers μ.

Exercice [D-E2] – Soient $n \geq 1$ et $p \in]0, 1[$. On lance n fois une pièce avec laquelle la probabilité d'obtenir pile est égale à p. Soit S_n la variable aléatoire réelle égale au nombre de piles obtenus et $Y_n = \exp(n^{-1} S_n)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de Y_n.

2) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers e^p.

Exercice [D-E3] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d* de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1) Déterminer la loi de Y_n et calculer son espérance et sa variance.

2) En déduire l'espérance et la variance de S_n.

3) Que peut-on dire sur la convergence en probabilité de S_n/n ?

Exercice [D-E4] – On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires où X_n suit une loi exponentielle de paramètre n. On pose $Y_n = \cos(\lfloor X_n \rfloor \pi)$ (où $\lfloor x \rfloor = \sup\{y \in \mathbb{N};\ y \leq x\}$).

1) Déterminer la loi de Y_n.

2) Montrer que la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.

Exercice [D-E5] – Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $m_n = \min(U_1, \ldots, U_n)$.

1) Montrer que m_n est une variable aléatoire admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Donner cette densité et calculer l'espérance et la variance de m_n.

2) Etudier la convergence en probabilité de m_n.

Exercice [D-E6] – Soit l'espace probabilisé $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathbb{P}_U)$ où $\mathbb{P}_U$ est la probabilité uniforme sur $[0,1]$. On pose pour $\omega \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n & \text{si } \omega \in [0, 1/n], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que X_n converge presque sûrement vers zéro.

Exercice [D-E7] – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements indépendants. On pose $p_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $X_n = \mathbb{I}_{A_n}$.

1) Si $p_n \to 0$, montrer que X_n converge en probabilité vers zéro.

2) Si $\sum p_n = \infty$, montrer que X_n ne converge pas presque sûrement vers 0.

3) En déduire que la convergence en probabilité n'implique pas la convergence presque sûre.

Exercice [D-E8] – Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,2]$. On pose $m_n := \min(U_1, \ldots, U_n)$.

1) Déterminer la fonction de répartition de m_n et donner sa moyenne.

2) Etudier la convergence presque sûre de m_n.

Exercice [D-E9] –

1) Montrer que X_n converge presque sûrement vers X si et seulement si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, \infty[$,

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \right) = 0.$$

2) En déduire que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.

Exercice [D-E10] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où X_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1/n, \ldots, (n-1)/n, 1\}$ avec $\mathbb{P}(X_n = k/n) = 1/(n+1)$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Montrer que X_n converge en loi vers X où X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice [D-E11] – Soit X_n une variable aléatoire de densité

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \cos(2n\pi x) & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f_n est une densité.

2) Expliquer brièvement pourquoi, pour tout $x \in]0, 1[$, $f_n(x)$ n'a pas de limite.

3) Montrer que X_n converge en loi vers X où X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice [D-E12] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p_n avec $np_n \to \lambda > 0$. Montrer que X_n converge vers une loi de Poisson de paramètre λ. En pratique cette approximation est valable si $n > 50$ et $np < 5$.

Exercice [D-E13] –

1) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Donner la loi de $T := -\log(X)$.

2) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires *i.i.d.* de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que

$$\max(X_1, \ldots, X_n) - \log(n) \xrightarrow{d} T.$$

Exercice [D-E14] – Soit $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. On note F la fonction de répartition de X_1. On suppose qu'il existe $-\infty < a < b < \infty$ tels que $F(t) = 0$ pour tout $t < a$, $F(t) \in]0, 1[$ pour tout $t \in [a, b[$ et $F(t) = 1$ si $t \geq b$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_k = \max(X_1, \ldots, X_k)$ et $m_k = \min(X_1, \ldots, X_k)$.

1) Donner l'expression des fonctions de répartition des variables aléatoires M_k et m_k en fonction de F.

2) Pour tout $\varepsilon > 0$ calculer les probabilités $\mathbb{P}(|M_k - b| \geq \varepsilon)$ et $\mathbb{P}(|m_k - a| > \varepsilon)$.

3) Montrer que la variable aléatoire $C_k = (M_k + m_k)/2$ converge en probabilité (lorsque $k \to \infty$) vers une constante c que vous préciserez.

4) Rappeler les énoncés du Lemme de Borel-Cantelli et de son corollaire.

5) Montrer que C_k converge presque-sûrement vers c lorsque $k \to \infty$.

Exercice [D-E15] – Soit $(X_n),\ n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - 1/n^2$ et $\mathbb{P}(X_n = n^2 - 1) = 1/n^2$.

1) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n > \varepsilon - 1) = \frac{1}{n^2} \mathbb{I}_{]0,n^2[}(\varepsilon).$$

3) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} -1$.

4) Montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} -1$.

Exercice [D-E16] – Soit $(X_n),\ n \geq 1$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - \exp(-t\theta_n) & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

où (θ_n), $n \geq 1$ est une suite de réels avec $\theta_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$.

1) Montrer que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ lorsque $n \to \infty$.

2) Si $\theta_n = n$, montrer que $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ lorsque $n \to \infty$.

Pour tout le reste de l'exercice, on prend $\theta_n = \ln(n)$ et on suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes.

3) Montrer que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > 1/2) = +\infty.$$

4) Montrer que

$$\mathbb{P}(\{X_n \to 0\}) \leq \mathbb{P}\left(\underline{\lim}\ \{|X_n| \leq 1/2\}\right).$$

5) En utilisant le Lemme de Borel-Cantelli, en déduire que $\mathbb{P}(\{X_n \to 0\}) = 0$.

Exercice [D-E17] – Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On définit pour tout $n \geq 1$ la variable aléatoire $Y_n = 2X_n + X_{n+1} - X_n X_{n+1}$.

1) Déterminer la loi de Y_n. Calculer son espérance et sa variance.

On pose dans la suite $Z_n = n^{-1}(Y_1 + \ldots + Y_n)$.

2) Calculer l'espérance de Z_n.

3) Pour $1 \leq i \leq j \leq n$, calculer la covariance entre Y_i et Y_j.

4) Calculer la variance de Z_n.

5) La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ vérifie t'elle la loi des grands nombres ?

Exercice [D-E18] – Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. La loi de X_n est donnée par $\mathbb{P}_{X_n} = (1-\delta_n)\mathbb{P}_1 + \delta_n \mathbb{P}_2$ où $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont des mesures de probablités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $\delta_n \in [0,1]$.

1) On suppose que $\mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_2$ sont des lois uniformes sur $[0,1]$ (*i.e.* $\mathbb{P}_1([0,t]) = \mathbb{P}_2([0,t]) = t$ pour tout $t \in [0,1]$). Donner la loi de X_n.

2) On suppose à présent que $\mathbb{P}_1$ est une loi uniforme sur $[0,1]$ et $\mathbb{P}_2$ une loi uniforme sur $[1,2]$.

   a) Donner l'expression de la fonction de répartition de X_n.
   b) Montrer que si δ_n converge vers 0, X_n ne converge pas en probabilité vers $1/2$.

Exercice [D-E19] – Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire $X_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de loi $\mathbb{P}_{X_n}$ définie pour tout $t > 0$ par $\mathbb{P}_{X_n}(]-\infty, t]) = [t/(1+t)]^n$.

1) Montrer (sans utiliser la question suivante) que $1/X_n$ converge en probabilité vers 0.

2) Montrer que $1/X_n$ converge presque-sûrement vers 0.

3) Etudier la convergence en loi de X_n/n.

Exercice [D-E20] – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de loi exponentielle de paramètre 1. Pour $n \geq 2$, on pose

$$Z_n := \max(X_1, \ldots, X_n)/\ln(n).$$

1) Calculer la fonction de répartition de Z_n.

2) Montrer que Z_n converge en probabilité vers 1.

Exercice [D-E21] – Soit X_1 une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_1. Pour $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire X_n admettant F_n pour fonction de répartition où, pour $x \geq 0$, $F_n(x) = F_1(nx)$. Les variables aléatoires X_1 et X_n, $n \geq 1$ sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1) Montrer que X_n converge en probabilité vers zéro.

On admet que si Y est une variable aléatoire positive et intégrable alors

$$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n) < \infty.$$

2) Montrer que si X_1 est intégrable alors X_n converge presque-sûrement vers zéro.

Exercice [D-E22] – Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires où la loi de X_n est donnée par

$$\mathbb{P}(X_n = 1 + 1/n) = \frac{n+2}{2n} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 2 + 1/n) = \frac{n-2}{2n}.$$

On considère une variable aléatoire X, indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 2}$ et telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = 1/2$.

1) Montrer que $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$ lorsque $n \to \infty$.

2) Quelles valeurs peut prendre la variable aléatoire $X_n - X$? Donner sa loi.

3) Montrer que X_n ne converge pas en moyenne vers X et que X_n ne converge pas en probabilité vers X.

4) Montrer que X_n converge en loi vers X.

Exercice [D-E23] – Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que ces variables sont indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1) Calculer l'espérance de X_1.

2) Montrer que $S_n/n \xrightarrow{\text{p.s.}} p$.

3) Quelle est la loi de S_n ?

4) Donner un ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ tel que $\sigma(S_n) = \sigma(\mathcal{C})$.

5) Montrer que $X_1 = \mathbb{I}_{X_1=1}$ (presque sûrement).

6) Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\int_{S_n^{-1}(\{i\})} X_1 d\mathbb{P} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0, \\ C_{n-1}^{i-1} p^i (1-p)^{n-i} & \text{si } i \in \{1, \ldots, n\}. \end{cases}$$

7) Donner la fonction $h : \{0, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathbb{E}(X_1|S_n) = h(S_n)$.

8) Montrer que $\mathbb{E}(X_1|S_n)$ converge presque-sûrement vers une constante que vous préciserez.