Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2021 - 2022

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Questions de cours –

1) Rappeler la définition d'un espace mesurable.
2) Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$. Donner la définition de la tribu $\sigma(\mathcal{C})$ engendrée par $\mathcal{C}$.
3) Donner l'écriture générale d'une fonction étagée positive g définie sur l'espace mesurable $(E, \mathcal{E})$.
4) Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire. Donner la définition de la loi de la variable aléatoire X

Exercice 1 – On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'elle tombe du côté "pile". Les lancers sont supposés indépendants et le résultat de l'expérience aléatoire est le nombre de lancers effectués.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
2) On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{1,2\}, \mathcal{P}(\{1,2\}))$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X(\omega) = 1$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = 2m+1$ et $X(\omega) = 2$ sinon.
   a) Montrer que X est une variable aléatoire.
   b) Quelle est la loi de X ?
   c) Ecrire la fonction X sous la forme d'une fonction étagée positive.
   d) Calculer l'intégrale
$$\int_{\Omega} X \, d\mathbb{P}.$$

Exercice 2 – On se place sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Donner les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{2\}, \{4\}\}$. Même question avec $\mathcal{C} = \{\{2, 4\}\}$.

Exercice 3 – On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de 8 cartes "trèfle", 8 cartes "pique", 8 cartes "cœur" et 8 cartes "carreau". Dans chaque couleur (trèfle, pique, cœur et carreau), les cartes sont marquées "7", "8", "9", "10", "Valet", "Dame", "Roi", "As".

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

2) On note E_R l'événement "on choisit une carte marquée *Roi*". Calculer la probabilité que E_R soit réalisé.

3) On note E_T l'événement "on choisit une carte de couleur *trèfle*". Les événements E_R et E_T sont-ils indépendants ?

4) Reprendre les questions 1) à 3) avec un jeu de 32 cartes pour lequel il manque le "7" de cœur et le "10" de pique. Il y a donc seulement 30 cartes.

Exercice 4 – On considère l'ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ regroupant les sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ tels que $]-\infty, 1] \subset A$ ou $]-\infty, 1] \subset \mathbb{R} \setminus A = A^{\mathrm{C}}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ forme une tribu de parties de $\mathbb{R}$.

2) On définit la fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par $\mu(A) = 1$ si $]-\infty, 1] \subset A^{\mathrm{C}}$ et $\mu(A) = 0$ si $]-\infty, 1] \subset A$. La fonction μ est-elle une mesure ?

3) Montrer que la fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par $\mu(A) = 0$ si $]-\infty, 1] \subset A^{\mathrm{C}}$ et $\mu(A) = \infty$ si $]-\infty, 1] \subset A$ est une mesure.