Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2021 - 2022

Correction

Exercice 1 – On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à ce qu'elle tombe du côté "pile". Les lancers sont supposés indépendants et le résultat de l'expérience aléatoire est le nombre de lancers effectués.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Réponse : L'ensemble des résultats possibles est l'ensemble $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. La tribu associée est la plus grande tribu, celle de l'ensemble des parties de Ω (i.e., $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$). Pour la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, il suffit de donner les valeurs $\mathbb{P}(\{n\})$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On a $\mathbb{P}(\{1\}) = 1/2$. C'est la probabilité d'obtenir "pile" au premier lancer. De même, $\mathbb{P}(\{2\}) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$, c'est la probabilité d'obtenir "face" au premier lancer et "pile" au second. De manière générale, on a donc $\mathbb{P}(\{n\}) = 2^{-n}$ pour tout $n \in \Omega$. On vérifie bien que

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \frac{1/2}{1 - 1/2} = 1.$$

2) On introduit la fonction $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{1,2\}, \mathcal{P}(\{1,2\}))$ définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X(\omega) = 1$ s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\omega = 2m+1$ et $X(\omega) = 2$ sinon.

   a) Montrer que X est une variable aléatoire.
   Réponse : La fonction X est forcément mesurable car l'espace de départ est muni de la plus grande tribu $\mathcal{P}(\Omega)$.

   b) Quelle est la loi de X ?
   Réponse : Il suffit de donner les valeurs $\mathbb{P}_X(\{1\})$ et $\mathbb{P}_X(\{2\})$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X(\{1\}) &= \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \exists m \in \mathbb{N};\ \omega = 2m+1\}) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(\{2m+1\}) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-(2m+1)} = \frac{1/2}{1 - 1/4} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

   On en déduit donc que $\mathbb{P}_X(\{2\}) = 1 - 2/3 = 1/3$.

c) Ecrire la fonction X sous la forme d'une fonction étagée positive.
Réponse : On a $X = \mathbb{I}_{A_1} + 2\mathbb{I}_{A_2}$ *avec* $A_1 = \{\omega \in \Omega \mid \exists m \in \mathbb{N};\ \omega = 2m+1\}$ *et* $A_2 = \Omega \setminus A_1$. *On a donc bien que*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbb{I}_{A_i},$$

avec $k = 2$, $\alpha_1 = 1$ *et* $\alpha_2 = 2$.

d) Calculer l'intégrale

$$\int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Réponse : D'après la définition de l'intégrale d'une fonction étagée positive, on a

$$\int_\Omega X d\mathbb{P} = 1 \times \mathbb{P}(A_1) + 2 \times \mathbb{P}(A_2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

car $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}_X(\{1\}) = 2/3$ *et* $\mathbb{P}(A_2) = 1 - 2/3 = 1/3$.

Exercice 2 – On se place sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Donner les éléments de la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{2\}, \{4\}\}$. Même question avec $\mathcal{C} = \{\{2, 4\}\}$.
Réponse : Pour $\mathcal{C} = \{\{2\}, \{4\}\}$ *on a*

$$\sigma(\mathcal{C}) = \{E, \emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}\}.$$

Pour $\mathcal{C} = \{\{2, 4\}\}$, *on a* $\sigma(\mathcal{C}) = \{E, \emptyset, \{2, 4\}, \{1, 3\}\}$.

Exercice 3 – On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué de 8 cartes "trèfle", 8 cartes "pique", 8 cartes "cœur" et 8 cartes "carreau". Dans chaque couleur (trèfle, pique, cœur et carreau), les cartes sont marquées "7", "8", "9", "10", "Valet", "Dame", "Roi", "As".

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
Réponse : Pour Ω, *il faut prendre l'ensemble des 32 cartes. On a donc* $\Omega = \{7\heartsuit, \ldots, 7\diamondsuit, \ldots, 7\spadesuit, \ldots, 7\clubsuit, \ldots\}$. *Le cardinal de* Ω *est 32 et on prend naturellement la tribu* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *et la probabilité* $\mathbb{P}$ *uniforme.*

2) On note E_R l'événement "on choisit une carte marquée *Roi*". Calculer la probabilité que E_R soit réalisé.
Réponse : On a $E_R = \{Roi\heartsuit, Roi\diamondsuit, Roi\spadesuit, Roi\clubsuit\}$. *Ainsi,* $\mathbb{P}(E_R) = 4/32 = 1/8$.

3) On note E_T l'événement "on choisit une carte de couleur *trèfle*". Les événements E_R et E_T sont-ils indépendants ?
Réponse : On remarque tout d'abord que $E_T = \{7\clubsuit, 8\clubsuit, \dots, As\clubsuit\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(E_T) = 8/32 = 1/4$. De plus, $E_R \cap E_T = \{Roi\clubsuit\}$ et donc $\mathbb{P}(E_R \cap E_T) = 1/32$. On vérifie ensuite que $\mathbb{P}(E_R \cap E_T) = 1/32 = \mathbb{P}(E_R) \times \mathbb{P}(E_T) = 1/8 \times 1/4$ donc les événements sont bien indépendants.

4) Reprendre les questions 1) à 3) avec un jeu de 32 cartes pour lequel il manque le "7" de cœur et le "10" de pique. Il y a donc seulement 30 cartes.
Réponse : Pour Ω, il faut prendre l'ensemble des 30 cartes. On prend naturellement la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme. On a $E_R = \{Roi\heartsuit, Roi\diamondsuit, Roi\spadesuit, Roi\clubsuit\}$. Ainsi, $\mathbb{P}(E_R) = 4/30 = 2/15$. De plus, $E_T = \{7\clubsuit, 8\clubsuit, \dots, As\clubsuit\}$ et. donc $\mathbb{P}(E_T) = 8/30 = 4/15$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E_R) \times \mathbb{P}(E_T) = \frac{2}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{8}{15} \neq \mathbb{P}(E_R \cap E_T) = \frac{1}{30}.$$

Les événements ne sont donc plus indépendants.

Exercice 4 – On considère l'ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ regroupant les sous-ensembles A de $\mathbb{R}$ tels que $]-\infty, 1] \subset A$ ou $]-\infty, 1] \subset \mathbb{R} \setminus A = A^{\mathrm{C}}$.

1) Montrer que $\mathcal{A}$ forme une tribu de parties de $\mathbb{R}$.
Réponse : Tout d'abord $\emptyset \in \mathcal{A}$ puisque $]-\infty, 1] \subset \emptyset^{\mathrm{C}} = \mathbb{R}$. De plus si $A \in \mathcal{A}$, alors soit $]-\infty, 1] \subset A = (A^{\mathrm{C}})^{\mathrm{C}}$ soit $]-\infty, 1] \subset A^{\mathrm{C}}$ ce qui montre bien que $A^{\mathrm{C}} \in \mathcal{A}$. Enfin, si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, il y a deux cas possibles : soit il existe un A_i tel que $]-\infty, 1] \subset A_i$ et donc forcément

$$]-\infty, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $]-\infty, 1] \subset A_n^{\mathrm{C}}$ et donc

$$]-\infty, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\mathrm{C}} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^{\mathrm{C}}$$

ce qui montre bien que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

2) On définit la fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par $\mu(A) = 1$ si $]-\infty, 1] \subset A^{\mathrm{C}}$ et $\mu(A) = 0$ si $]-\infty, 1] \subset A$. La fonction μ est-elle une mesure ?
Réponse : Non ce n'est pas une mesure car $\mu(\emptyset) = 1 \neq 0$ puisque $]-\infty, 1] \subset \emptyset^{\mathrm{C}} = \mathbb{R}$.

3) Montrer que la fonction $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ définie pour tout $A \in \mathcal{A}$ par $\mu(A) = 0$ si $]-\infty, 1] \subset A^{\mathrm{C}}$ et $\mu(A) = \infty$ si $]-\infty, 1] \subset A$ est une mesure.
Réponse : On a $\mu(\emptyset) = 0$ puisque $]-\infty, 1] \subset \emptyset^{\mathrm{C}} = \mathbb{R}$. Soit (A_n) une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Il y a deux cas possibles : i) soit il existe un A_i tel que $]-\infty, 1] \subset A_i$ et donc $\mu(A_i) = \infty$ ce qui implique que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \infty.$$

De plus on a nécessairement que

$$]-\infty, 1] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

ce qui implique que

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \infty = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

ii) soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $]-\infty, 1] \subset A_n^{\mathrm{C}}$ et donc $\mu(A_i) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = 0.$$

De plus

$$]-\infty, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^{\mathrm{C}} = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)^{\mathrm{C}},$$

et donc

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$