Contrôle continu #1
Intégration et probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours “Mathématiques appliquées” et “Actuariat”
Année 2022 - 2023

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Donner les propriétés que doit vérifier $\mathcal{E}$ pour être une tribu.

2) Quelles propriétés doit vérifier la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ pour être une mesure ?

3) Soit $f : (E_1, \mathcal{E}_1) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ une application. Que faut-il supposer pour que f soit mesurable ?

Exercice 2 – On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés.

1) Proposer un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience. On notera par exemple (i, j) un élément de Ω avec $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$.

On note X la fonction définie sur Ω et donnant la somme des résultats des deux dés.

2) Quel est l'ensemble I des valeurs prises par X ?
3) Montrer que la fonction X est mesurable si on munit l'ensemble d'arrivée de la tribu $\mathcal{P}(I)$.
4) Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, 6\}^2$, donner la valeur de $\alpha_{i,j}$ telle que

$$X = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \alpha_{i,j} \mathbb{I}_{\{(i,j)\}}.$$

En déduire la valeur de
$$\mathbb{E}(X) = \int_\Omega X d\mathbb{P}.$$

Exercice 3 – On considère la suite de fonction $f_n : E :=]0, 1] \times]0, 1] \to \mathbb{R}$ avec pour tout $n \geq 1$ et $(x, y) \in E$,

$$f_n(x, y) := \sum_{i=1}^{3^n} i \mathbb{I}_{A_{n,i}}(x, y),$$

où $A_{n,i}$ est le pavé

$$A_{n,i} := \left] \frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \right] \times \left] \frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \right].$$

1) Montrer que f_n, $n \geq 1$ est une suite de fonctions étagées positives (on munit les ensembles de départ et d'arrivée des tribus $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ respectivement).

2) Calculer $\int_E f_n d\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur E.

3) Vérifier que

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\lambda = \frac{1}{2}.$$

Exercice 4 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ une fonction quelconque.

1) Montrer que si X est une variable aléatoire alors $X \circ X$ est également une variable aléatoire.

On suppose à présent que $\mathcal{F}$ contient tous les singletons et que $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.

2) Soit $B \notin \mathcal{F}$ et soient a et b deux éléments distincts de $\Omega \setminus B$. On considère la fonction définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X(\omega) = a$ si $\omega \in B$ et $X(\omega) = b$ si $\omega \notin B$. Montrer que la fonction X n'est pas une variable aléatoire mais que $X \circ X$ oui.