Correction du Contrôle continu #1
Intégration et probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques appliquées" et "Actuariat"
Année 2022 - 2023

Exercice 1 – Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Donner les propriétés que doit vérifier $\mathcal{E}$ pour être une tribu.

   Pour être une tribu, $\mathcal{E}$ doit contenir l'ensemble vide, doit être stable par union dénombrable et par passage au complémentaire.

2) Quelles propriétés doit vérifier la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ pour être une mesure ?

   Pour être une mesure, on doit avoir $\mu(\emptyset) = 0$ et la propriété de σ-additivité.

3) Soit $f : (E_1, \mathcal{E}_1) \to (E_2, \mathcal{E}_2)$ une application. Que faut-il supposer pour que f soit mesurable ?

   Pour que f soit mesurable, il faut que pour tout $A \in \mathcal{E}_2$, $f^{-1}(A) = \{x \in E_1;\ f(x) \in A\} \in \mathcal{E}_1$.

Exercice 2 – On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer deux dés équilibrés.

1) Proposer un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ permettant de modéliser cette expérience. On notera par exemple (i, j) un élément de Ω avec $i, j \in \{1, \dots, 6\}$.

   L'ensemble des issues possibles de l'expérience est $\Omega = \{(i,j);\ i, j \in \{1, \dots, 6\}\}$. Le cardinal de Ω est $6^2 = 36$. La tribu associée est naturellement la plus grande tribu possible i.e., $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Enfin, la probabilité sera la probabilité uniforme donnée par $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/36$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On note X la fonction définie sur Ω et donnant la somme des résultats des deux dés.

2) Quel est l'ensemble I des valeurs prises par X ?

   L'ensemble des valeurs possibles pour la somme est $I = \{2, \dots, 12\}$.

3) Montrer que la fonction X est mesurable si on munit l'ensemble d'arrivée de la tribu $\mathcal{P}(I)$.

   Il suffit de montrer que pour tout $s \in I$, $X^{-1}(\{s\}) \in \mathcal{F}$. Comme $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, ceci est évidemment vrai.

4) Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, 6\}^2$, donner la valeur de $\alpha_{i,j}$ telle que

$$X = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \alpha_{i,j} \mathbb{I}_{\{(i,j)\}}.$$

En déduire la valeur de

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}.$$

On a $\alpha_{i,j} = i + j$. *Ainsi,*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (i+j)\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} (i+j) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} (6i+21) \\
&= \frac{6 \times 21 + 6 \times 21}{36} = 7.
\end{aligned}$$

Exercice 3 – On considère la suite de fonction $f_n : E :=]0,1] \times]0,1] \to \mathbb{R}$ avec pour tout $n \geq 1$ et $(x, y) \in E$,

$$f_n(x, y) := \sum_{i=1}^{3^n} i \mathbb{I}_{A_{n,i}}(x, y),$$

où $A_{n,i}$ est le pavé

$$A_{n,i} := \left] \frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \right] \times \left] \frac{i-1}{3^n}, \frac{i}{3^n} \right].$$

1) Montrer que f_n, $n \geq 1$ est une suite de fonctions étagées positives (on munit les ensembles de départ et d'arrivée des tribus $\mathcal{B}(E)$ et $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ respectivement).

   Il est facile de voir que

$$f_n = \sum_{i=0}^{3^n} \alpha_i \mathbb{I}_{A_{n,i}},$$

   avec $\alpha_0 = 0$, $\alpha_i = i$ *pour* $i = 1, \ldots, 3^n$ *et*

$$A_{n,0} = E \setminus \bigcup_{i=1}^{3^n} A_{n,i} \in \mathcal{B}(E).$$

   Donc f_n *est bien une fonction étagée positive.*

2) Calculer $\int_E f_n d\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue sur E.

   On a

$$\int_E f_n d\lambda = \sum_{i=1}^{3^n} \frac{i}{9^n} = \frac{3^n(3^n+1)}{2 \times 9^n} = \frac{3^n+1}{2 \times 3^n} \to \frac{1}{2}.$$

3) Vérifier que

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\lambda = \frac{1}{2}.$$

C'est évident d'après la question précédente

Exercice 4 – Soit $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\Omega, \mathcal{F})$ une fonction quelconque.

1) Montrer que si X est une variable aléatoire alors $X \circ X$ est également une variable aléatoire.

   On peut utiliser directement le résultat du cours assurant que la composée de deux fonctions mesurables est également une fonction mesurable. On peut sinon le démontrer : soit $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}(X\circ X)^{-1}(A) &= \{\omega \in \Omega;\ X(X(\omega)) \in A\} = \big\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in X^{-1}(A)\big\} \\ &= X^{-1}(X^{-1}(A)) \in \mathcal{F},\end{aligned}$$

   car $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

On suppose à présent que $\mathcal{F}$ contient tous les singletons et que $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\Omega)$.

2) Soit $B \notin \mathcal{F}$ et soient a et b deux éléments distincts de $\Omega \setminus B$. On considère la fonction définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X(\omega) = a$ si $\omega \in B$ et $X(\omega) = b$ si $\omega \notin B$. Montrer que la fonction X n'est pas une variable aléatoire mais que $X \circ X$ oui.

   La fonction X n'est pas mesurable car par exemple $X^{-1}(\{a\}) = B \notin \mathcal{F}$. Cependant, il est facile de remarquer $X \circ X(\omega) = b$ pour tout $\omega \in \Omega$ et donc que $X \circ X$ est mesurable.