Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques
Parcours "Mathématiques Appliquées" et "Actuariat"
Année 2023 - 2024

Durée : 1h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 – Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré.

1) Donner les propriétés que doit vérifier $\mathcal{E}$ pour être une tribu.

2) Quelles propriétés doit vérifier la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ pour être une mesure ?

3) On suppose à présent que $E = \{a, (b, c)\}$ (l'ensemble E contient donc deux éléments). Vérifier que la tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{(b, c)\}\}$ est la tribu des parties de E. Décrire cette tribu.

Exercice 2 – Soit $E = \{Lun, Mar, Mer, Jeu, Ven, Sam, Dim\}$ l'ensemble des jours de la semaine.

1) Décrire la tribu $\mathcal{E}$ engendrée par $\mathcal{C} = \{\{Mer\}, \{Sam, Dim\}\}$.

Soit l'application $f : (E, \mathcal{E}) \mapsto (\{0, 1, 2\}, \mathcal{P}(\{0, 1, 2\}))$ définie par $f(Mer) = 1$, $f(Sam) = f(Dim) = 2$ et $f(Lun) = f(Mar) = f(Jeu) = f(Ven) = 0$.

2) Montrer que f est mesurable et que $\mathcal{E}$ est la plus petite tribu rendant f mesurable.

3) Soit la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ telle que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mu(A)$ soit le carré du nombre de jours que contient l'ensemble A (par exemple, $\mu(\{Sam, Dim\}) = 2^2 = 4$). Montrer que μ n'est pas une mesure.

4) On admettra que la fonction d'ensemble $\nu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ telle que pour tout $A \in \mathcal{E}$, $\mu(A)$ est le nombre de jours que contient l'ensemble A est une mesure. Calculer
$$\int_{\{Sam, Dim\}} f d\nu.$$

Exercice 3 – Soit Ω l'ensemble des matrices 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c et d sont des réels valant 0 ou 1. On munit Ω de la tribu $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme.

1) Pour toute matrice $\omega \in \Omega$, donner la valeur de $\mathbb{P}(\{\omega\})$.

2) Calculer la probabilité de l'événement "ω est une matrice diagonale".

3) Soit l'application $X : (\Omega, \mathcal{F}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ associant à toute matrice ω la somme de ses éléments. Donner les ensembles $X^{-1}(\{3\})$ et $X^{-1}([4, \infty[)$.

Exercice 4 – Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Deux joueurs (disons J_1 et J_2) se présentent devant l'urne. Le joueur J_1 tire une boule de l'urne et la garde avec lui. Le joueur J_2 tire ensuite une boule de l'urne.

1) Modéliser cette expérience aléatoire par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Le joueur gagnant est celui qui tire la boule avec le plus grand numéro.

2) Calculer la probabilité que le joueur J_1 gagne.

Pour tout $(i, j) \in \{1, \cdots, 10\}^2$, on note $A_i \subset \Omega$ (resp. B_j) l'événement regroupant les éléments de Ω où J_1 (resp. J_2) tire la boule numéro i (resp. j).

3) Quel est le cardinal de A_i ? Celui de B_j ?

4) Donner l'expression (en fonction de i et j) de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(B_j \mid A_i)$.

5) Le joueur J_1 tire la boule numéro 6. Calculer la probabilité que le joueur J_2 gagne.

Soit $A \subset \Omega$ le sous-ensemble regroupant tous les résultats de l'expérience aléatoire pour lesquels le joueur J_1 gagne. Soit la fonction

$$X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \to (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}),$$

définie pour tout $\omega \in \Omega$ par $X(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et 0 sinon.

6) Montrer que X est une variable aléatoire.

7) Calculer l'intégrale de Lebesgue de X par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.