Contrôle continu #1 de Probabilités

Troisième année de la Licence de Mathématiques

Année 2023 - 2024

Durée : 1 h. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits

---

Exercice 1 –

1) Pour être une tribu, $\mathcal{E}$ doit contenir l'ensemble vide $\emptyset$, doit être stable par union dénombrable et enfin par passage au complémentaire.

2) Pour être une mesure la fonction d'ensemble $\mu : \mathcal{E} \mapsto [0, \infty]$ doit vérifier les propriétés suivantes :

   i) $\mu(\emptyset) = 0$,

   ii) Si A_n est une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{E}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

3) La tribu engendrée par $\mathcal{C} = \{\{(b, c)\}\}$ est donnée par

$$\{\emptyset, E, \{(b, c)\}, \{a\}\}.$$

   Elle est évidemment égale à la tribu des parties de E.

Exercice 2 –

1) La tribu $\mathcal{E}$ engendrée par $\mathcal{C} = \{\{Mer\}, \{Sam, Dim\}\}$ est

$$\begin{aligned}&\{\emptyset, E, \{Mer\}, \{Sam, Dim\}, \{Lun, Mar, Mer, Jeu, Ven\},\\ &\{Lun, Mar, Jeu, Ven\},\\ &\{Mer, Sam, Dim\}, \{Lun, Mar, Jeu, Ven, Sam, Dim\}\}\end{aligned}$$

2) Pour montrer que f est mesurable, il suffit de montrer que $f^{-1}(\{i\}) \in \mathcal{E}$ où $i \in \{0, 1, 2\}$. Or, $f^{-1}(\{0\}) = \{Lun, Mar, Jeu, Ven\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{Mer\}$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{Sam, Dim\}$. On remarque facilement que $\mathcal{E}$ est la tribu engendrée par $\{f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}), f^{-1}(\{2\})\}$ et donc que $\mathcal{E}$ est la plus petite tribu rendant f mesurable.

3) La fonction μ n'est pas une mesure car par exemple $\mu(\{Mer\}\cup\{Sam, Dim\}) = 3^2 = 9$ alors que $\mu(\{Mer\}) = 1$ et $\mu(\{Sam, Dim\}) = 4$. Donc la propriété de σ-additivité n'est pas satisfaite.

4) On a

$$\begin{aligned}
\int_{\{Sam,Dim\}} f d\nu &= \int_E f \mathbb{I}_{\{Sam,Dim\}} d\nu \\
&= \int_E (\mathbb{I}_{\{Mer\}} + 2\mathbb{I}_{\{Sam,Dim\}})\mathbb{I}_{\{Sam,Dim\}} d\nu \\
&= \int_E (\mathbb{I}_{\emptyset} + 2\mathbb{I}_{\{Sam,Dim\}}) d\nu \\
&= 1 \times \mu(\emptyset) + 2 \times \mu(\{Sam, Dim\}) = 4.
\end{aligned}$$

Exercice 3 –

1) Comme le cardinal de E est $2^4 = 16$, on a pout tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = 1/16$.

2) Il y a 4 possibilités pour que ω soit est une matrice diagonale. La probabilité cherchée vaut donc $1/4$.

3) Pour l'ensemble, $X^{-1}(\{3\})$ il faut donner les matrices dont la somme des coefficients vaut 3. C'est donc l'ensemble des matrices ne contenant qu'un seul 0. Il y en a quatre. Ainsi,

$$X^{-1}(\{3\}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Enfin, $X^{-1}([4, \infty[)$ est l'ensemble des matrices dont la somme des éléments est égale à quatre. Ainsi,

$$X^{-1}([4, \infty[) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 4 –

1) L'espace Ω regroupe l'ensemble des résultats de l'expérience aléatoire. En notant (i, j) l'élément de Ω correspondant au résultat "le joueur J_1 tire la boule numéro i et le joueur J_2 la boule numéro j", on a

$$\Omega = \{(1, 2), (1, 3), \cdots, (2, 1), (2, 3), \cdots\},$$

avec $\mathrm{Card}(\Omega) = 9 \times 10 = 90$. La tribu $\mathcal{F}$ est naturellement la tribu des parties de Ω et la mesure de probabilité la probabilité uniforme.

2) Il suffit de donner le cardinal du sous-ensemble de Ω regroupant les éléments (i, j) avec $i > j$. Il est facile de voir que ce cardinal est égal à

$$9 + 8 + \cdots + 1 = \frac{9 \times 10}{2} = 45.$$

Ainsi, la probabilité que le joueur gagne est de $45/90 = 1/2$.

3) Le cardinal de A_i est de 9. On a $A_i = \{(i,j);\ j = 1, \cdots, 10,\ j \neq i\}$. De même, le cardinal de B_j est 9.

4) On a $\mathbb{P}(B_j \mid A_i) = 0$ si $i = j$ et $1/9$ sinon.

5) La probabilité que le joueur J_2 gagne est

$$\sum_{j=7}^{10} \mathbb{P}(B_j \mid A_i) = \frac{4}{9}.$$

6) La fonction X est nécessairement une variable aléatoire puisque la tribu de l'ensemble de départ est la plus grande possible (celle des parties de Ω).

7) Il suffit de remarquer que $X = \mathbb{I}_A$. Ainsi,

$$\int_\Omega X d\mathbb{P} = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2},$$

d'après la question 2).